

# **Influential Article Review – Improved NSGA-II And SPEA 2 Portfolio Optimization**

**Bertram Foreman**

**Aeryn Fletcher**

**Orla Dougherty**

*This paper examines financial innovation. We present insights from a highly influential paper. Here are the highlights from this paper: In this study, we analyze three portfolio selection strategies for loss-averse investors: semi-variance, conditional value-at-risk, and a combination of both risk measures. Moreover, we propose a novel version of the non-dominated sorting genetic algorithm II and of the strength Pareto evolutionary algorithm 2 to tackle this optimization problem. The effectiveness of these algorithms is compared with two alternatives from the literature from five publicly available datasets. The computational results indicate that the proposed algorithms in this study outperform the others for all the examined performance metrics. Moreover, they can approximate the Pareto front even in cases in which all the other approaches fail. For our overseas readers, we then present the insights from this paper in Spanish, French, Portuguese, and German.*

*Keywords: Multi-objective portfolio optimization, Semi-variance, CVaR, NSGA-II, SPEA 2, Intermediate crossover, Gaussian mutation*

## **SUMMARY**

- We perform a multi-problem analysis in which the four MOEAs are tested on 15 optimization problems. To check the robustness of the results, 20 simulations for each algorithm and for each test problem are used. The algorithms are implemented in MATLAB R2018b and the experiments are carried out on a 2.2 GHz Intel Core i7 laptop with 4 GB RAM.
- Table 6 reports the average number of nondominated solutions provided by the algorithms in the final approximated optimal sets, divided by problem and dataset involved. It can be noticed that including the proposed configuration in the reproduction process increases the search capabilities of both NSGA-II and SPEA 2 with respect to the standard configuration. NSGA-IIa and SPEA 2a can identify sets of optimal solutions with a size almost equal to the pre-defined threshold of 250 individuals in all the test problems, while NSGA-IIb and SPEA 2b produce much smaller optimal sets as the complexity of the problems increases.
- Tables 7, 8 and 9 focus on the distribution of the values for the performance metrics, averaged over the 20 simulations for each portfolio optimization problem. We check whether the differences in the performance are significant by using the R package called «scmamp». First, we apply the

Friedman aligned omnibus test to detect if at least one of the algorithms performs differently to the others. The results reported in Table 10 show that the differences are significant for three out of four criteria. The algorithms have comparable performance only for the spacing metric. Thus, the analysis can proceed to characterize the differences found for the  $\sigma$ , IGD, and HV indicators using a post-hoc procedure. As suggested in , we use the Friedman aligned post-hoc test with the correction of . Table 11 lists the five hypotheses of equality among the four algorithms and the corresponding adjusted p-values. With a 1% level of significance, we find an improvement in the performance of NSGA-II and SPEA 2 when they involve the second selection and reproduction scheme.

- For illustrative purposes, Figs. 1 and 2 show a comparison of the Pareto fronts obtained by the four algorithms analyzed for the DowJones, NASDAQ100, and NASDAQComposite datasets corresponding to the simulations that attain the highest values of the hypervolume metric. The proposed versions of the algorithms NSGA-II and SPEA 2 can identify frontiers with more evenly scattered and spread-out points than the standard alternatives in all the test problems. The differences among the algorithms are already marked for problems with 83 decision variables. As the size of the investible universe increases, NSGA-IIb and SPEA 2b no longer cover the shape of the Pareto front and tend to produce highly inefficient solutions, with higher risks and lower expected returns. Moreover, for the three-objective portfolio optimization problem, the charts on the left of Fig. 2 highlight the relationship between Stsd and CVaR, which is almost linear for higher values of risk.
- Figure 3 displays the mean processing time of the four algorithms for each portfolio model and for each dataset.

## HIGHLY INFLUENTIAL ARTICLE

We used the following article as a basis of our evaluation:

Kaucic, M., Moradi, M., & Mirzazadeh, M. (2019). Portfolio optimization by improved NSGA-II and SPEA 2 based on different risk measures. *Financial Innovation*, 5(1), 1–28.

This is the link to the publisher's website:

<https://jfin-swufe.springeropen.com/articles/10.1186/s40854-019-0140-6>

## INTRODUCTION

The portfolio selection problem can be defined as the optimal allocation of wealth among a finite number of assets that follows careful processing of all available information about both investors and markets (Meucci 2009). Markowitz's mean-variance model is by far the most popular procedure in asset allocation (Guerard 2009). Even if it is considered the cornerstone in this field, the mean-variance portfolio optimization model presents two serious drawbacks from a theoretical point of view. First, when asset returns are skewed and fat-tailed, they tend to include only a limited proportion of stochastically dominant assets in the efficient solutions, and prematurely preclude asset with negatively skewed returns. Second, risk is measured by variance, which treats both the above and below target returns equally, while investors are more concerned about the probability of investment returns falling below the target return. Consequently, risks are under-estimated and portfolios that are downside efficient are ruled out.

A solution proposed in the literature to make Markowitz's approach more effective is to replace the variance with a downside risk measure in order to model the loss aversion of investors properly. In this context, semi-variance has been studied extensively (Nawrocki 1999; Sing and Ong 2000). Two main reasons justify these efforts. First, semi-variance is an approximation of the skewness for the return distribution, since it measures below-target returns. The higher is the value of semi-variance, the greater are both the degree of negative skewness and the risk of the investment. Second, semi-variance efficient

portfolios closely approximate the stochastic-dominance efficient set. However, the computation of portfolio semi-variance is a difficult task owing to the endogenous nature of the portfolio co-semi-variance matrix, which depends on the weights assigned to each asset, that is, changes in the weights affect the periods in which the portfolio underperforms the target level, which, in turn, affects the evaluation of the co-semi-variance matrix itself. Some attempts have been proposed to solve this problem directly (Hogan and Warren 1972; Konno et al. 2002; Markowitz 1959; Markowitz et al. 1993). Other studies have focused on the definition of an exogenous co-semi-variance matrix that satisfactorily approaches the endogenous one (Ballesterio and Pla-Santamaria 2005; Cumova and Nawrocki 2011; Estrada 2008; Nawrocki 1991). Nowadays, because of the regulatory importance of quantifying large losses in banking and insurance, another class of downside risk measures, called quantile-based measures, occupies a leading position in the risk management sector. One of the most popular examples is value-at-risk (VaR), defined as the maximum loss occurring over a given period at a given confidence level. Although VaR is apparently easy to use and intuitive, it presents several disadvantages. Primarily, it ignores losses exceeding VaR and is not sub-additive, that is, diversification of the portfolio may increase VaR (Artzner et al. 1999). From a computational perspective, VaR is difficult to use when investors want to optimize their portfolios, since it is represented by a non-linear, non-convex, and non-differentiable function with multiple local optima (Gaivoronski and Pflug 2005). Moreover, rational agents wishing to act on their decisions according to expected utility theory may be misled by the information related to the portfolio VaR (Yamai et al. 2002). To deal with these shortcomings, (Rockafellar et al. 2000) introduced the conditional value-at-risk (CVaR), which is defined as the conditional expectation of losses above the VaR (Sarykalin et al. 2008). CVaR is a coherent risk measure in the sense of (Artzner et al. 1999) and, because it is a convex function, optimization problems with CVaR as the minimization objective and/or constraints can be efficiently handled (Krokhmal et al. 2002; Larsen et al. 2002; Rockafellar and Uryasev 2002).

Increasing complexity of practical applications has led researchers to develop heuristic procedures for solving their portfolio optimization problems. These techniques require less domain information to be considered than the standard gradient-based mathematical programming methods do. Moreover, they guarantee satisfactory approximations to solutions in a fair computational time even when they deal with non-convexity, discontinuity, and integer decision variables. The approaches that have been proposed in the soft-computing literature can be categorized into the following two groups. On one hand, single objective methods optimize a weighted sum of the portfolio objectives. On the other hand, multi-objective evolutionary algorithms (MOEAs) attempt to tackle the allocation problem directly in its multi-objective form by simultaneously optimizing risk and reward. In the first case, the complete set of risk-return profiles is obtained by varying a parameter that represents the risk aversion of the investor (Chang et al. 2000; Crama and Schyns 2003; Cura 2009; Woodside-Oriakhi et al. 2011). In the second case, the complete efficient frontier is represented in a single run (Anagnostopoulos and Mamanis 2011a; Meghwani and Thakur 2017; Mishra et al. 2014). Both categories pay great attention to encoding types and constraint-handling techniques (Liagkouras and Metaxiotis 2015; Meghwani and Thakur 2017; Metaxiotis and Liagkouras 2012; Ponsich et al. 2013). Some real-life situations, which are not considered in Markowitz's model, have been analyzed recently by (Eftekharian et al. 2017) and (Meghwani and Thakur 2018). (Eftekharian et al. 2017) include as constraints some restrictions on the number of assets in the portfolio, limitations on investing in assets from a given industry, and cardinality, class, and quantity constraints. Furthermore, they developed an improved version of the NSGA II algorithm, called 2-Phase NSGA II, to solve the resulting optimization problem. Meghwani and Thakur (2018) focus on the problem of handling equality constraints, like self-financing constraints, and constraints arising from the inclusion of transaction cost models using MOEAs. Researchers have also focused on so-called swarm intelligence methods to overcome the computational difficulties of realistic portfolio designs. Unlike evolutionary algorithms that utilize the principle of natural selection, these approaches are inspired by the behavior and self-organizing interaction among agents, such as foraging of ant and bee colonies, bird flocking, and fish schooling (see Ertenlice and Kalayci (2018) for a detailed review of the subject).

Over the past few decades, machine-learning algorithms have been widely used to explore financial data and make data-driven predictions (Chao et al. 2019; Kou 2019). For instance, (Huang and Kou 2014)

present a kernel entropy manifold learning algorithm to measure the relationships between two financial data points in order to describe the characteristics of a financial system by deriving the dynamic properties of the original data space. Similarly, (Huang et al. 2017) propose an information metric-based manifold learning algorithm to extract the intrinsic manifold of a dynamic financial system and to detect impending crises. (Ergu et al. 2014) focus on the use of the analytical network process in risk assessment and decision analysis of an emergent event. They propose a new consistency index to assess the key factors of risks and analyze the impacts and preferences of decision alternatives. Zhang et al. (2019) develop three soft minimum cost models based on different weighted average operators for resolving consensus decision-making problems. The usefulness of the proposed models is validated in a real-world loan consensus problem, using data from a Chinese P2P platform.

Kalayci et al. (2019) review state-of-the-art methods dedicated to mean-variance portfolio optimization.

Evolutionary computations are made by iterations and, in each iteration, the weights of the portfolios are known a priori because they are generated by the algorithm. Thus, it is possible to directly determine in which periods the portfolio underperforms the target level. In this manner, the difficulty of computing the ex-post portfolio semi-variance can be fruitfully resolved by the use of an evolutionary algorithm. One of the first studies to attempt this is (Dueck and Winker 1992), who reformulate the bi-objective optimization problem into a single-objective and solve it through a local search technique, called threshold accepting. In a similar way, (Arnone et al. 1993) propose a solution to a parametric programming problem with the objective of optimizing a convex combination of mean and semi-variance. The algorithm is based on Whitley's GENITOR system (Whitley 1988) and uses a steady-state breeding strategy and elitist selection. Chang et al. (2009) apply a genetic algorithm to portfolio optimization problems in different risk measures, namely variance, semi-variance, absolute deviation, and variance with skewness. Recently, (Liagkouras and Metaxiotis 2013) address the mean-semi-variance portfolio optimization problem from a multi-objective perspective by developing an ad-hoc evolutionary algorithm. Evidence of the robustness of the algorithm is accomplished in out-of-sample testing during both bull and bear market conditions on the FTSE 100. Macedo et al. (2017) compare the non-dominated sorting genetic algorithm II (NSGA-II, Deb et al. (2002)) and the strength Pareto evolutionary Algorithm 2 (SPEA 2, Zitzler et al. (2001)) within the mean-semi-variance portfolio optimization framework. Numerical experiments indicate that NSGA-II outperforms SPEA 2 in-sample. Senhaji et al. (2016) propose to resolve the problem by combining the continuous Hopfield neural network with NSGA-II. The effectiveness of this strategy is proved using a portfolio of 20 assets.

Regarding the quantile-based minimization problems involving many financial instruments, a large number of price scenarios is necessary to estimate risk correctly. As the dimension of the problems increases, this operation can be time consuming (Lim et al. 2010) and the use of heuristics may be advisable or even necessary to detect a solution. An example is provided by the multi-purpose data-driven optimization heuristic proposed in Gilli M and Hysi (2006), which deals with different risk functions, such as VaR, CVaR, maximum loss, and Omega, as well as with practical constraints on the portfolio composition. An evolutionary computation approach is developed by (Hochreiter 2007) to solve the general scenario-based risk-return portfolio optimization problem when standard deviation, VaR, or CVaR are used to represent the risk of the investment. A variant of the NSGA-II algorithm based on differential operators is developed by (Krink and Paterlini 2011) for portfolio optimization involving real-world constraints and quantile-based risk measures. Meanwhile, a comparison of the capabilities of different MOEAs to adapt in any addition of new constraints and/or replacement of the risk function is given in (Anagnostopoulos and Mamanis 2011b), and (Baixauli-Soler et al. 2012) focus on SPEA 2 performance. Recently, hybrid stock trading systems based on evolutionary metaheuristics and mean-CVaR models are proposed in Chen and Wang (2015) and (Qin et al. 2014).

The contribution of this study is twofold. On one hand, based on the promising results of (Subbu et al. 2005) and (Baixauli-Soler et al. 2010), we include in the same portfolio optimization framework the loss-averse attitude of investors as well as the capital requirements imposed by the regulator, and we investigate the relationship between semi-variance and CVaR in quantifying the downside risk. On the other hand, we

extend the research of (Liu et al. 2010) and investigate the effectiveness of using the uniform selection scheme, the extended intermediate crossover operator (Gen and Cheng 2000; Mühlenbein and Schlierkamp-Voosen 1993), and the Gaussian mutation (Hinterding 1995; Schwefel 1987) in the NSGA-II and SPEA 2 algorithms in order to generate the approximated Pareto fronts for the considered downside risk-based portfolio optimization problems. In addition, the performance of the proposed algorithms is compared to that of other variants of the NSGA-II and SPEA 2 algorithms that have already been shown to be highly competitive in portfolio optimization problems. The results on five publicly available datasets show that our procedures completely dominate the fronts produced by the counterparts from the literature. Furthermore, our variants of the NSGA-II and SPEA 2 algorithms can generate the entire Pareto front for large-scale problems for which the other Pareto-based approaches are unable to work properly.

The rest of the paper is organized as follows. In “The portfolio selection problem under downside risk measures” section, we introduce three preference relations based on the reward-downside risk principle and discuss the related portfolio selection problems. “Pareto-based evolutionary algorithms” section presents a description of the MOEAs used for solving the resulting optimization problems. “Experimental analysis” section outlines the numerical experiments and “Concluding remarks and future research” section presents concluding remarks and ideas for further research.

## **CONCLUSION**

In this study, we described three instances of the portfolio selection problem designed to handle the downside risk of an investment properly. A flexible multi-objective reward-to-risk framework was presented in which expected returns, semi-variance, and CVaR of a portfolio can be optimized simultaneously. These problems were tackled using two non-dominated sorting algorithms, namely, NSGA-II and SPEA 2, which have already showed competitive performance for the mean variance problem. In particular, we proposed a novel combination of operators for the selection and reproduction phases to be included in both algorithms. A comparative analysis was undertaken with respect to a second variant of the same algorithms, involving another configuration design. We used five publicly available datasets ranging from small- to large-sized portfolio optimization problems. The capabilities of the procedures were assessed in terms of four performance metrics. Finally, a set of statistical tests checked the robustness of these findings. Overall, the numerical experiments showed that the proposed algorithms outperformed the others with respect to all the criteria. Even if the algorithms with the novel variation configuration demanded the use of more computational time as the dimension of the problems increased, they nonetheless yielded reasonable results for the cases in which the other algorithms failed to capture the shape of the Pareto front properly.

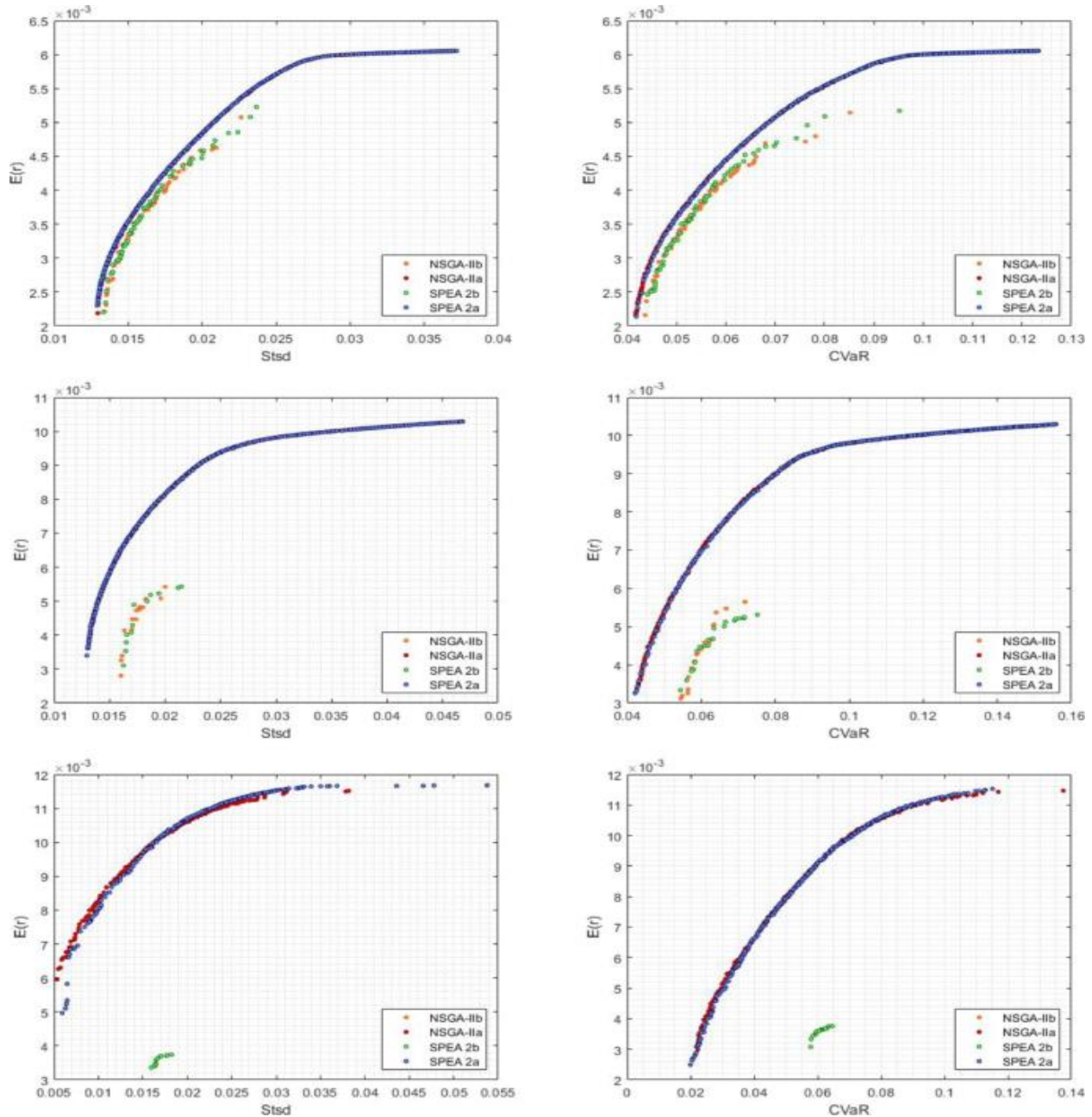
These research findings can be put in practice to improve the risk management infrastructure of an investment company. The inclusion of several risk measures in the portfolio optimization process can increase the capabilities of the system to describe the risk, providing more attractive investment opportunities.

Future research work on the topic includes the analysis of out-of-sample effectiveness for this type of strategy, which is expected to be improved by the incorporation of other simulation techniques to estimate semi-variance and CVaR. We are also interested in exploring mechanisms that adaptively exploit several selection schemes and reproduction operators to accelerate convergence and allow the search to be stopped automatically when a suitable level of quality for the approximated set has been attained.

## **APPENDIX**

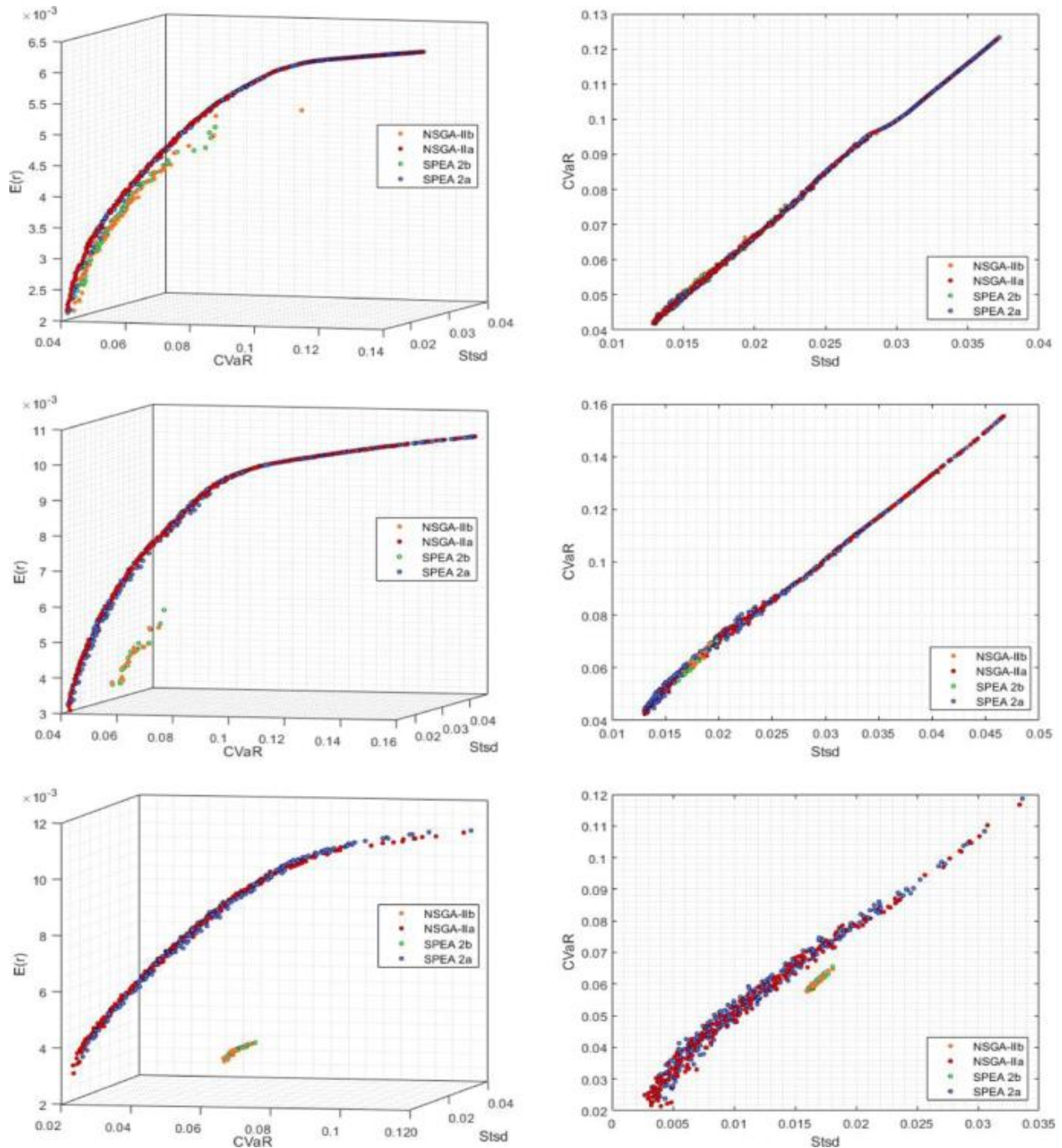
### **FIGURE 1**

**APPROXIMATED PARETO FRONTS FOR THE MEAN-SEMI-VARIANCE (ON THE LEFT)  
AND MEAN-CVaR (ON THE RIGHT) PORTFOLIO OPTIMIZATION PROBLEMS  
CORRESPONDING TO THE SIMULATIONS WITH THE HIGHEST HV VALUES OBTAINED  
BY NSGA-IIb, NSGA-IIa, SPEA 2b AND SPEA 2a FOR THE DATASETS DOWJONES  
(CHARTS AT THE TOP), NASDAQ100 (CHARTS IN THE MIDDLE) AND  
NASDAQCOMPOSITE (CHARTS BELOW)**



**FIGURE 2**  
**APPROXIMATED PARETO FRONTS FOR THE MEAN-STSD-CVaR PORTFOLIO  
OPTIMIZATION PROBLEM (ON THE LEFT) AND THEIR PROJECTIONS ONTO THE  
STSD-CVaR PLANE (ON THE RIGHT) CORRESPONDING TO THE SIMULATIONS WITH**

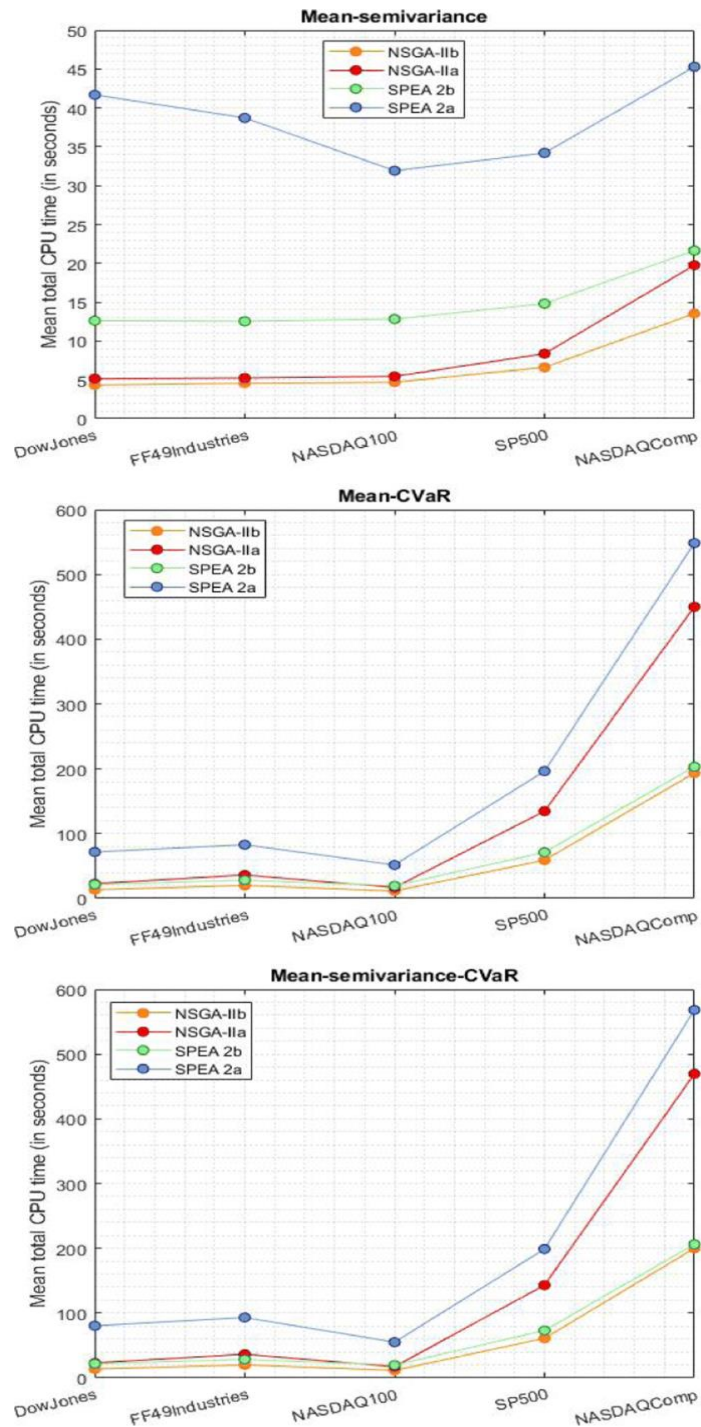
**THE HIGHEST HV VALUES OBTAINED BY NSGA-IIb, NSGA-IIa, SPEA 2b AND SPEA 2a FOR THE DATASETS DOWJONES (CHARTS AT THE TOP), NASDAQ100 (CHARTS IN THE MIDDLE) AND NASDAQCOMPOSITE (CHARTS BELOW)**



**FIGURE 3**

**MEAN TOTAL CPU TIMES (IN SECONDS) FOR THE MEAN-SEMI-VARIANCE (CHARTS AT THE TOP), MEAN-CVaR (CHARTS IN THE MIDDLE) AND MEAN-SEMI-VARIANCE-CVaR (CHARTS BELOW) PORTFOLIO OPTIMIZATION PROBLEMS FOR 100,000**

**FUNCTION EVALUATIONS OF THE ALGORITHMS NSGA-IIb, NSGA-IIa, SPEA 2B AND SPEA 2A FOR THE CONSIDERED DATASETS OVER 20 SIMULATIONS**



**TABLE 1**  
**RUN TIME COMPLEXITY FOR THE ALGORITHMS**



Algorithm	Run-time
NSGA-IIb	$\mathcal{O}(Gm(2N)^2)$
NSGA-IIa	$\mathcal{O}\left(Gm(1 + 2P_{cross} + P_{mut})^2 N^2\right)$
SPEA2b	$\mathcal{O}(G(2N)^3)$
SPEA 2a	$\mathcal{O}\left(G(1 + 2P_{cross} + P_{mut})^3 N^3\right)$

**TABLE 2**  
**DATASETS OF WEEKLY RETURNS CONSIDERED IN THIS STUDY (BRUNI ET AL. 2016)**

Dataset name	Stock market index	Assets (n)	Time interval	# of obs.
DowJones	Dow Jones Industrial Average	28	Feb 1990 – Apr 2016	1363
FF49Industries	Fama and French 49 Industry	49	Jul 1969 – Jul 2015	2325
NASDAQ100	NASDAQ 100	82	Nov 2004 – Apr 2016	596
SP500	S&P 500	442	Nov 2004 – Apr 2016	595
NASDAQComp	NASDAQ Composite	1203	Feb 2003 – Apr 2016	665

**TABLE 3**  
**CLASSIFICATION OF THE ASSETS BELONGING TO EACH DATASET IN TERMS OF SKEWNESS (SKEW), STANDARD SEMIDEVIATION (STSD) AND STANDARD DEVIATION (STD)**

Dataset name	Skew < -0.5		Skew > 0.5	
	Assets	Stsd > Std	Assets	Stsd < Std
DowJones	2	2	1	1
FF49Industries	2	2	6	6
NASDAQ100	2	2	20	20
SP500	25	25	109	108
NASDAQComp	19	15	668	668

**TABLE 4**  
**AVERAGE RANKINGS ACHIEVED BY THE FRIEDMAN TEST FOR THE NSGA-IIA ALGORITHM WITH DIFFERENT PARAMETER SETTINGS**

NSGA-IIa	Rankings
$P_{cross}=0.45, d=0.5, P_{mut}=0.5, \mu_m=0.1, \sigma_m=0.15$	58.89
$P_{cross}=\mathbf{0.45}, d=\mathbf{1}, P_{mut}=\mathbf{0.3}, \mu_m=\mathbf{0.1}, \sigma_m=\mathbf{0.10}$	<b>59.33</b>
$P_{cross}=0.45, d=1, P_{mut}=0.3, \mu_m=0.1, \sigma_m=0.15$	58.00
$P_{cross}=0.45, d=1, P_{mut}=0.3, \mu_m=0.3, \sigma_m=0.10$	57.89
$P_{cross}=0.45, d=1, P_{mut}=0.5, \mu_m=0.3, \sigma_m=0.20$	59.22

<sup>a</sup>The highest ranking is shown in bold

**TABLE 5**  
**AVERAGE RANKINGS ACHIEVED BY THE FRIEDMAN TEST FOR THE SPEA 2A ALGORITHM WITH DIFFERENT PARAMETER SETTINGS**

SPEA 2a	Rankings
$P_{cross}=0.45, d=1, P_{mut}=0.3, \mu_m=0.1, \sigma_m=0.10$	64.89
$P_{cross}=0.45, d=1, P_{mut}=0.3, \mu_m=0.1, \sigma_m=0.20$	63.44
$P_{cross}=\mathbf{0.45}, d=\mathbf{1}, P_{mut}=\mathbf{0.5}, \mu_m=\mathbf{0.1}, \sigma_m=\mathbf{0.10}$	<b>69.22</b>
$P_{cross}=0.45, d=1, P_{mut}=0.5, \mu_m=0.1, \sigma_m=0.15$	67.89
$P_{cross}=0.45, d=1, P_{mut}=0.5, \mu_m=0.1, \sigma_m=0.20$	67.56

<sup>a</sup>The highest ranking is shown in bold

**TABLE 6**  
**AVERAGE NUMBER OF NONDOMINATED SOLUTIONS IN THE APPROXIMATED PARETO FRONT (MEAN) WITH THE CORRESPONDING STANDARD DEVIATION (STD) FOR EACH ALGORITHM**

Problem	Dataset	NSGA-IIb		NSGA-IIa		SPEA 2b		SPEA 2a	
		Mean	std	Mean	Std	Mean	Std	Mean	Std
Mean-SV	DowJones	52.10	5.75	248.06	4.93	55.65	6.12	250	0
	FF49Industries	16.65	4.61	250	0	15.20	3.68	250	0
	NASDAQ100	14.25	2.90	250	0	13.40	2.89	250	0
	SP500	11.55	3.22	250	0	11.50	3.32	250	0
	NASDAQComp	13.60	2.93	202.50	20.97	13.60	2.93	245.20	9.29
Mean-CVaR	DowJones	49.70	6.24	247.33	4.86	51.15	6.66	250	0
	FF49Industries	16.10	3.80	249.95	0.22	17.25	3.19	250	0
	NASDAQ100	16.45	3.27	250	0	16.80	3.86	250	0
	SP500	12.60	2.84	250	0	12.45	2.68	250	0
	NASDAQComp	15.80	3.43	238.60	13.18	16.10	3.91	249.05	2.21
Mean-CVaR-SV	DowJones	92.90	14.62	246.33	7.57	91.75	11.96	250	0
	FF49Industries	22.25	7.04	250	0	21.25	6.70	250	0
	NASDAQ100	22.45	5.82	250	0	22.50	3.90	250	0
	SP500	18.20	6.18	250	0	18.85	7.51	250	0
	NASDAQComp	25.65	6.03	250	0	25.65	5.59	250	0

**TABLE 7**  
**MEAN, STANDARD DEVIATION (STD), MEDIAN, MINIMUM (MIN) AND MAXIMUM (MAX) VALUES OF THE PERFORMANCE METRICS FOR THE COMPARED ALGORITHMS FOR THE MEAN-SV PORTFOLIO OPTIMIZATION PROBLEM**

Dataset	Statistic	S				$\Delta^*$				IGD				HV			
		NSGA-IIb	NSGA-IIa	SPEA-2b	SPEA-2a	NSGA-IIb	NSGA-IIa	SPEA-2b	SPEA-2a	NSGA-IIb	NSGA-IIa	SPEA-2b	SPEA-2a	NSGA-IIb	NSGA-IIa	SPEA-2b	SPEA-2a
DowJones	Mean	0.0064	<b>0.0023</b>	0.0069	0.0034	0.8197	0.6101	0.8047	<b>0.5773</b>	0.4081	0.4695	0.4021	<b>0.3377</b>	0.8638	0.9859	0.8531	<b>1.1705</b>
	Median	0.0057	<b>0.0025</b>	0.0061	0.0031	0.8155	<b>0.5627</b>	0.8076	0.5780	0.4121	0.3381	0.3976	<b>0.3377</b>	0.8619	1.1702	0.8467	<b>1.1705</b>
	Std	0.0019	<b>0.0009</b>	0.0021	0.0011	0.0285	0.1424	0.0302	<b>0.0131</b>	0.0203	0.2699	0.0229	<b>0.0002</b>	0.0393	0.3800	0.0489	<b>0.0001</b>
	Min	0.0041	<b>0.0000</b>	0.0038	0.0029	0.7669	<b>0.5437</b>	0.7452	0.5564	0.3683	0.3375	0.3603	<b>0.3374</b>	0.7963	<b>0.1725</b>	0.7953	1.1707
	Max	0.0113	<b>0.0033</b>	0.0116	0.0080	0.8765	1.0000	0.8622	<b>0.6087</b>	0.4439	0.9994	0.4425	<b>0.3383</b>	0.9405	1.1704	0.9763	<b>1.1710</b>
FF49Industries	Mean	0.0086	<b>0.0023</b>	0.0089	0.0035	0.7854	<b>0.6003</b>	0.7960	0.6165	0.6558	0.4767	0.6534	<b>0.4765</b>	0.5578	1.0536	0.5555	<b>1.0538</b>
	Median	0.0083	<b>0.0023</b>	0.0085	0.0035	0.7811	<b>0.6008</b>	0.8004	0.6173	0.6575	0.4767	0.6554	<b>0.4763</b>	0.5574	1.0536	0.5509	<b>1.0538</b>
	Std	0.0015	<b>0.0002</b>	0.0018	0.0003	0.0175	0.0117	0.0264	<b>0.0112</b>	0.0178	<b>0.0003</b>	0.0183	0.0004	0.0136	<b>0.0002</b>	0.0097	0.0003
	Min	0.0068	<b>0.0020</b>	0.0060	0.0029	0.7540	<b>0.5828</b>	0.7564	0.5946	0.6208	0.4761	0.6147	<b>0.4759</b>	0.5372	<b>1.0534</b>	0.5410	1.0531
	Max	0.0128	<b>0.0029</b>	0.0131	0.0042	0.8265	<b>0.6220</b>	0.8513	0.6409	0.6837	0.4774	0.6778	<b>0.4771</b>	0.5911	1.0540	0.5763	<b>1.0542</b>
NASDAQ100	Mean	0.0039	<b>0.0027</b>	0.0040	0.0036	0.8822	<b>0.5199</b>	0.8797	0.5888	0.7326	0.2589	0.7330	<b>0.2588</b>	0.4321	1.2061	0.4311	<b>1.2062</b>
	Median	0.0037	<b>0.0026</b>	0.0039	0.0035	0.8822	<b>0.5226</b>	0.8807	0.5865	0.7338	0.2590	0.7344	<b>0.2588</b>	0.4270	1.2061	0.4297	<b>1.2062</b>
	Std	0.0009	0.0005	0.0008	<b>0.0004</b>	0.0110	0.0204	<b>0.0085</b>	0.0175	0.0151	0.0006	0.0121	<b>0.0005</b>	0.0175	0.0004	0.0248	<b>0.0005</b>
	Min	0.0026	<b>0.0019</b>	0.0027	0.0030	0.8633	<b>0.4904</b>	0.8652	0.5620	0.7021	<b>0.2579</b>	0.7091	0.2581	0.4118	1.2051	0.3986	<b>1.2051</b>
	Max	0.0057	<b>0.0039</b>	0.0057	0.0046	0.8999	<b>0.5507</b>	0.8992	0.6220	0.7536	<b>0.2599</b>	0.7541	<b>0.2599</b>	0.4720	1.2066	0.4793	<b>1.2067</b>
SP500	Mean	0.0016	0.0048	<b>0.0015</b>	0.0041	0.9547	0.6605	0.9551	<b>0.6318</b>	1.0134	0.2787	1.0135	<b>0.2761</b>	0.1481	1.1828	0.1468	<b>1.1955</b>
	Median	<b>0.0015</b>	0.0047	<b>0.0015</b>	0.0039	0.9547	0.6738	0.9550	<b>0.6289</b>	1.0134	0.2788	1.0135	<b>0.2760</b>	0.1467	1.1830	0.1440	<b>1.1966</b>
	Std	<b>0.0003</b>	0.0015	<b>0.0003</b>	0.0008	0.0049	0.0418	<b>0.0046</b>	0.0237	0.0052	0.0013	0.0053	<b>0.0011</b>	0.0057	0.0060	0.0062	<b>0.0025</b>
	Min	<b>0.0011</b>	0.0025	<b>0.0011</b>	0.0032	0.9459	<b>0.5706</b>	0.9471	0.5942	1.0027	0.2757	1.0025	<b>0.2743</b>	0.1418	1.1727	0.1399	<b>1.1885</b>
	Max	0.0024	0.0077	<b>0.0019</b>	0.0065	0.9643	0.7284	0.9654	<b>0.7074</b>	1.0211	0.2815	1.0217	<b>0.2795</b>	0.1616	1.1917	0.1609	<b>1.1981</b>
NASDAQComp	Mean	0.0010	0.0045	<b>0.0009</b>	0.0089	0.9714	<b>0.7839</b>	0.9711	0.8766	1.1084	0.2070	1.1085	<b>0.2012</b>	0.0499	1.2214	0.0492	<b>1.2472</b>
	Median	0.0010	0.0036	<b>0.0009</b>	0.0057	0.9721	<b>0.7862</b>	0.9703	0.8578	1.1098	0.2045	1.1099	<b>0.1970</b>	0.0488	1.2219	0.0481	<b>1.2505</b>
	Std	<b>0.0002</b>	0.0019	<b>0.0002</b>	0.0079	<b>0.0020</b>	0.0596	0.0027	0.1232	<b>0.0033</b>	0.0133	0.0033	0.0127	<b>0.0034</b>	0.0133	0.0037	0.0123
	Min	<b>0.0007</b>	0.0030	<b>0.0007</b>	0.0025	0.9678	<b>0.6011</b>	0.9654	0.6346	1.1013	0.1991	1.1013	<b>0.1922</b>	0.0464	1.1886	0.0452	<b>1.2132</b>
	Max	0.0014	0.0107	<b>0.0013</b>	0.0361	0.9740	<b>0.8741</b>	0.9769	1.1636	1.1128	0.2607	1.1129	<b>0.2458</b>	0.0570	1.2395	0.0571	<b>1.2575</b>

<sup>a</sup>Numbers in bold represent best results among the algorithms with respect to the corresponding performance metric

**TABLE 8**  
**MEAN, STANDARD DEVIATION (STD), MEDIAN, MINIMUM (MIN) AND MAXIMUM (MAX) VALUES OF THE PERFORMANCE METRICS FOR THE COMPARED ALGORITHMS FOR THE MEAN-CVAR PORTFOLIO OPTIMIZATION PROBLEM**

Dataset	Statistic	S				$\Delta^*$				IGD				HV			
		NSGA-IIb	NSGA-IIa	SPEA-2b	SPEA-2a	NSGA-IIb	NSGA-IIa	SPEA-2b	SPEA-2a	NSGA-IIb	NSGA-IIa	SPEA-2b	SPEA-2a	NSGA-IIb	NSGA-IIa	SPEA-2b	SPEA-2a
DowJones	Mean	0.0080	<b>0.0021</b>	0.0082	0.0045	0.7888	0.6141	0.7795	<b>0.6066</b>	0.4172	0.4957	0.4120	<b>0.3577</b>	0.8327	0.8893	0.8224	<b>1.1021</b>
	Median	0.0074	<b>0.0023</b>	0.0074	0.0045	0.7922	<b>0.5662</b>	0.7774	0.6054	0.4188	0.3578	0.4108	<b>0.3577</b>	0.8193	<b>1.1041</b>	0.8177	1.1027
	Std	0.0028	0.0008	0.0025	<b>0.0005</b>	0.0293	0.1460	0.0328	<b>0.0102</b>	0.0127	0.2451	0.0115	<b>0.0004</b>	0.0314	0.3845	0.0252	<b>0.0003</b>
	Min	0.0044	<b>0.0000</b>	0.0050	0.0038	0.7340	<b>0.5343</b>	0.7277	0.5956	0.3910	0.3575	0.3955	<b>0.3571</b>	0.7866	0.1725	0.7898	<b>1.1020</b>
	Max	0.0155	<b>0.0029</b>	0.0153	0.0056	0.8532	1.0000	0.8469	<b>0.6372</b>	0.4361	0.9095	0.4360	<b>0.3582</b>	0.9013	<b>1.1046</b>	0.8962	1.1033
FF49Industries	Mean	0.0085	<b>0.0023</b>	0.0083	0.0035	0.8015	0.6135	0.8026	<b>0.6111</b>	0.6740	0.5055	0.6787	<b>0.5052</b>	0.5184	<b>0.9957</b>	0.5103	0.9953
	Median	0.0083	<b>0.0023</b>	0.0082	0.0034	0.8023	0.6131	0.8030	<b>0.6118</b>	0.6792	0.5056	0.6804	<b>0.5052</b>	0.5171	<b>0.9957</b>	0.5089	0.9954
	Std	0.0018	<b>0.0002</b>	0.0015	0.0005	0.0208	0.0165	0.0255	<b>0.0112</b>	0.0162	<b>0.0002</b>	0.0136	<b>0.0002</b>	0.0134	<b>0.0002</b>	0.0115	0.0003
	Min	0.0061	<b>0.0018</b>	0.0053	0.0028	0.7702	<b>0.5807</b>	0.7529	0.5894	0.6404	0.5051	0.6473	<b>0.5049</b>	0.4992	<b>0.9954</b>	0.4924	0.9946
	Max	0.0115	<b>0.0025</b>	0.0111	0.0046	0.8508	0.6456	0.8556	<b>0.6317</b>	0.6970	0.5059	0.7021	<b>0.5057</b>	0.5592	<b>0.9960</b>	0.5416	0.9958
NASDAQ100	Mean	0.0044	<b>0.0024</b>	0.0044	0.0047	0.8454	<b>0.5250</b>	0.8410	0.6157	0.7159	0.3011	0.7179	<b>0.3009</b>	0.4227	<b>1.1232</b>	0.4132	1.1225
	Median	0.0044	<b>0.0022</b>	0.0044	0.0047	0.8487	<b>0.5259</b>	0.8399	0.6136	0.7223	0.3010	0.7245	<b>0.3007</b>	0.4169	<b>1.1234</b>	0.4106	1.1225
	Std	0.0007	<b>0.0006</b>	<b>0.0006</b>	<b>0.0006</b>	0.0140	0.0194	<b>0.0137</b>	0.0187	0.0165	0.0007	0.0175	<b>0.0006</b>	0.0154	<b>0.0006</b>	0.0141	0.0007
	Min	0.0031	<b>0.0020</b>	0.0031	0.0037	0.8158	<b>0.4981</b>	0.8131	0.5792	0.6785	0.2999	0.6767	<b>0.2997</b>	0.4024	<b>1.1221</b>	0.3920	1.1215
	Max	0.0060	<b>0.0041</b>	0.0056	0.0057	0.8634	<b>0.5854</b>	0.8716	0.6468	0.7366	0.3025	0.7441	<b>0.3019</b>	0.4523	<b>1.1242</b>	0.4506	1.1239
SP500	Mean	<b>0.0017</b>	0.0046	<b>0.0017</b>	0.0038	0.9455	0.6555	0.9445	<b>0.6475</b>	0.9658	0.3561	0.9658	<b>0.3528</b>	0.1886	1.0962	0.1877	<b>1.1084</b>
	Median	<b>0.0017</b>	0.0039	<b>0.0017</b>	0.0035	0.9464	0.6576	0.9438	<b>0.6473</b>	0.9660	0.3560	0.9660	<b>0.3529</b>	0.1889	1.0964	0.1868	<b>1.1084</b>
	Std	0.0003	0.0019	0.0003	0.0008	0.0050	0.0306	<b>0.0047</b>	0.0267	0.0028	0.0012	0.0030	<b>0.0008</b>	0.0030	0.0053	0.0038	<b>0.0022</b>
	Min	<b>0.0012</b>	0.0027	0.0013	0.0026	0.9383	0.6110	0.9363	<b>0.5905</b>	0.9606	0.3543	0.9599	<b>0.3513</b>	0.1843	1.0843	0.1828	<b>1.1027</b>
	Max	<b>0.0025</b>	0.0106	0.0026	0.0060	0.9559	0.7413	0.9594	<b>0.6927</b>	0.9709	0.3585	0.9717	<b>0.3541</b>	0.1951	1.1052	0.1952	<b>1.1115</b>
NASDAQComp	Mean	<b>0.0014</b>	0.0062	<b>0.0014</b>	0.0044	0.9527	0.7833	0.9533	<b>0.7366</b>	0.9476	0.4536	0.9475	<b>0.4497</b>	0.2150	0.9999	0.2143	<b>1.0210</b>
	Median	<b>0.0013</b>	0.0051	0.0014	0.0040	0.9515	0.7882	0.9546	<b>0.7343</b>	0.9482	0.4507	0.9483	<b>0.4504</b>	0.2147	1.0054	0.2139	<b>1.0225</b>
	Std	0.0003	0.0035	<b>0.0002</b>	0.0014	<b>0.0038</b>	0.0381	0.0050	0.0267	<b>0.0027</b>	0.0114	<b>0.0027</b>	0.0053	0.0021	0.0173	0.0024	<b>0.0068</b>
	Min	<b>0.0010</b>	0.0033	0.0011	0.0029	0.9465	0.7014	0.9425	<b>0.6977</b>	0.9412	0.4434	0.9411	<b>0.4388</b>	0.2112	0.9573	0.2111	<b>1.0037</b>
	Max	0.0021	0.0190	<b>0.0018</b>	0.0089	0.9617	0.8544	0.9614	<b>0.8029</b>	0.9509	0.4952	0.9510	<b>0.4585</b>	0.2195	1.0287	0.2197	<b>1.0341</b>

<sup>a</sup>Numbers in bold represent best results among the algorithms with respect to the corresponding performance metric

**TABLE 9**  
**MEAN, STANDARD DEVIATION (STD), MEDIAN, MINIMUM (MIN) AND MAXIMUM (MAX) VALUES OF THE PERFORMANCE METRICS FOR THE COMPARED ALGORITHMS FOR THE MEAN-SEMI-VARIANCE-CVAR PORTFOLIO OPTIMIZATION PROBLEM**

Dataset	Statistic	S				$\Delta^*$				IGD				HV			
		NSGA-IIb	NSGA-IIa	SPEA-2b	SPEA-2a	NSGA-IIb	NSGA-IIa	SPEA-2b	SPEA-2a	NSGA-IIb	NSGA-IIa	SPEA-2b	SPEA-2a	NSGA-IIb	NSGA-IIa	SPEA-2b	SPEA-2a
DowJones	Mean	0.0113	0.1829	0.0122	<b>0.0047</b>	0.7356	0.9073	0.7304	<b>0.5973</b>	0.4643	0.5827	0.4685	<b>0.4243</b>	0.9383	0.9160	0.9349	<b>1.1504</b>
	Median	0.0096	<b>0.0040</b>	0.0111	0.0046	0.7322	0.6091	0.7278	<b>0.5938</b>	0.4655	<b>0.4232</b>	0.4703	0.4243	0.9378	<b>1.1538</b>	0.9353	1.1507
	Std	0.0056	0.5373	0.0051	<b>0.0003</b>	0.0235	0.6294	0.0219	<b>0.0129</b>	0.0106	0.2935	0.0097	<b>0.0013</b>	0.0235	0.4254	0.0213	<b>0.0011</b>
	Min	0.0055	<b>0.0000</b>	0.0068	0.0042	0.7058	<b>0.5683</b>	0.6987	0.5840	0.4371	<b>0.4216</b>	0.4480	0.4225	0.8930	0.0259	0.8970	<b>1.1487</b>
	Max	0.0315	1.7121	0.0269	<b>0.0057</b>	0.8140	2.3622	0.7761	<b>0.6263</b>	0.4836	1.3523	0.4842	<b>0.4274</b>	0.9936	<b>1.1556</b>	0.9650	1.1516
FF49Industries	Mean	0.0149	<b>0.0048</b>	0.0130	0.0051	0.6899	<b>0.6116</b>	0.6875	0.6264	0.7604	<b>0.5661</b>	0.7592	0.5663	0.4675	<b>0.9934</b>	0.4676	0.9923
	Median	0.0131	<b>0.0048</b>	0.0122	<b>0.0052</b>	0.6973	0.6095	0.6877	0.6293	0.7613	<b>0.5662</b>	0.7615	0.5663	0.4634	<b>0.9935</b>	0.4646	0.9921
	Std	0.0056	0.0004	0.0025	<b>0.0003</b>	0.0188	<b>0.0106</b>	0.0161	0.0110	0.0203	0.0012	0.0213	<b>0.0009</b>	0.0222	<b>0.0006</b>	0.0191	0.0007
	Min	0.0090	<b>0.0040</b>	0.0106	0.0046	0.6452	<b>0.5942</b>	0.6577	0.6071	0.7231	<b>0.5633</b>	0.7126	0.5647	0.4371	<b>0.9924</b>	0.4394	0.9910
	Max	0.0284	<b>0.0056</b>	0.0209	0.0060	0.7161	<b>0.6322</b>	0.7275	0.6430	0.7878	<b>0.5681</b>	0.7861	0.5682	0.5135	<b>0.9944</b>	0.5212	0.9937
NASDAQ100	Mean	<b>0.0060</b>	0.0065	<b>0.0060</b>	0.0087	0.7885	<b>0.5807</b>	0.7862	0.6090	0.7007	0.3603	0.7013	<b>0.3600</b>	0.5367	<b>1.2166</b>	0.5348	1.2143
	Median	0.0058	<b>0.0051</b>	0.0060	0.0073	0.7846	<b>0.5844</b>	0.7847	0.5979	0.7071	0.3603	0.7065	<b>0.3598</b>	0.5331	<b>1.2167</b>	0.5318	1.2154
	Std	0.0012	0.0045	<b>0.0010</b>	0.0033	0.0131	0.0380	<b>0.0097</b>	0.0326	0.0174	0.0013	0.0187	<b>0.0009</b>	0.0180	<b>0.0009</b>	0.0198	0.0029
	Min	0.0044	<b>0.0041</b>	0.0048	0.0054	0.7720	<b>0.5141</b>	0.7711	0.5572	0.6494	<b>0.3583</b>	0.6499	0.3584	0.5155	<b>1.2148</b>	0.4940	1.2061
	Max	<b>0.0090</b>	0.0249	0.0081	0.0157	0.8123	0.6846	0.8026	<b>0.6820</b>	0.7173	0.3631	0.7353	<b>0.3621</b>	0.5875	1.2177	0.5867	<b>1.2179</b>
SP500	Mean	0.0025	0.0117	<b>0.0024</b>	0.0131	0.9130	0.6531	0.9114	<b>0.6480</b>	1.0043	0.4065	1.0042	<b>0.4057</b>	0.1793	<b>1.1797</b>	0.1795	1.1822
	Median	0.0024	0.0103	<b>0.0023</b>	0.0114	0.9127	0.6511	0.9104	<b>0.6431</b>	1.0049	0.4059	1.0049	<b>0.4053</b>	0.1784	1.1819	0.1786	<b>1.1841</b>
	Std	0.0004	0.0053	<b>0.0003</b>	0.0070	0.0054	0.0345	<b>0.0050</b>	0.0311	0.0049	0.0038	0.0050	<b>0.0021</b>	<b>0.0041</b>	0.0112	0.0042	0.0072
	Min	<b>0.0018</b>	0.0032	<b>0.0018</b>	0.0049	0.8997	0.5986	0.9060	<b>0.5846</b>	0.9939	<b>0.4017</b>	0.9937	0.4019	0.1718	1.1413	0.1722	<b>1.1611</b>
	Max	0.0033	0.0204	<b>0.0031</b>	0.0325	0.9220	0.7283	0.9257	<b>0.7103</b>	1.0104	0.4183	1.0111	<b>0.4108</b>	0.1880	<b>1.1929</b>	0.1881	1.1913
NASDAQComp	Mean	0.0027	0.0106	<b>0.0026</b>	0.0123	0.8967	0.6113	0.8968	<b>0.5986</b>	1.0450	0.5133	1.0450	<b>0.5132</b>	0.1612	1.0369	0.1612	<b>1.0417</b>
	Median	0.0027	0.0099	<b>0.0025</b>	0.0100	0.8957	0.6068	0.8967	<b>0.5950</b>	1.0448	<b>0.5119</b>	1.0449	0.5144	0.1615	1.0396	0.1614	<b>1.0425</b>
	Std	0.0004	0.0045	<b>0.0003</b>	0.0051	<b>0.0068</b>	0.0289	<b>0.0068</b>	0.0247	<b>0.0021</b>	0.0083	<b>0.0021</b>	0.0065	<b>0.0017</b>	0.0119	<b>0.0017</b>	0.0080
	Min	<b>0.0021</b>	0.0054	0.0022	0.0063	0.8869	0.5638	0.8850	<b>0.5521</b>	1.0421	0.5025	1.0420	<b>0.5019</b>	0.1581	1.0050	0.1579	<b>1.0245</b>
	Max	0.0038	0.0248	<b>0.0030</b>	0.0233	0.9106	0.6863	0.9140	<b>0.6397</b>	1.0499	0.5377	1.0499	<b>0.5268</b>	0.1644	<b>1.0576</b>	0.1646	1.0537

<sup>a</sup>Numbers in bold represent best results among the algorithms with respect to the corresponding performance metric

**TABLE 10**  
**STATISTICS AND RELATED P-VALUES FOR THE FRIEDMAN ALIGNED OMNIBUS TEST**  
**FOR EACH OF THE FOUR PERFORMANCE METRICS**

Performance metric	Statistic	p-value
S	0.443	0.9312
$\Delta^*$	29.59	1.681e-06
IGD	30.42	1.124e-06
HV	33.5	2.528e-07

**TABLE 11**  
**ADJUSTED P-VALUES FOR THE FRIEDMAN ALIGNED POST-HOC TEST WITH**  
**BERGMANN AND HOMMEL'S CORRECTION FOR MULTIPLE COMPARISONS AMONG**  
**THE FOUR ALGORITHMS**

Hypothesis	Adj. p-values		
	$\Delta^*$	IGD	HV
NSGA-IIb versus NSGA-IIa	6.276e-05	6.889e-05	9.857e-06
NSGA-IIb versus SPEA 2b	1	1	1
NSGA-IIb versus SPEA 2a	3.098e-05	1.692e-05	8.199e-06
NSGA-IIa versus SPEA 2a	1	1	1
SPEA 2b versus SPEA 2a	3.098e-05	1.692e-05	8.199e-06

**TABLE 12**  
**CONTRAST ESTIMATION RESULTS FOR THE PERFORMANCE METRIC**

Performance metric	Estimation	NSGA-IIb	NSGA-IIa	SPEA 2b	SPEA 2a
$\Delta^*$	NSGA-IIb	0	0.206	0.0037	0.2158
	NSGA-IIa	-0.206	0	-0.2023	0.0098
	SPEA 2b	-0.0037	0.2023	0	0.2121
	SPEA 2a	-0.2158	-0.0098	-0.2121	0
IGD	NSGA-IIb	0	0.4151	-0.0001	0.4157
	NSGA-IIa	-0.4151	0	-0.4161	0.0006
	SPEA 2b	0.0001	0.4161	0	0.4167
	SPEA 2a	-0.4157	-0.0006	-0.4167	0
HV	NSGA-IIb	0	-0.7012	0.0054	-0.7032
	NSGA-IIa	0.7012	0	0.7066	-0.002
	SPEA 2b	-0.0054	-0.7066	0	-0.7086
	SPEA 2a	0.7032	0.002	0.7086	0

## REFERENCES

- Acerbi, C, Tasche D (2002) On the coherence of expected shortfall. *J Bank Financ* 26(7):1487–1503.
- Anagnostopoulos, KP, Mamanis G (2011a) The mean–variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms. *Expert Syst Appl* 38(11):14208–14217.
- Anagnostopoulos, KP, Mamanis G (2011b) Multiobjective evolutionary algorithms for complex portfolio optimization problems. *Comput Manag Sci* 8(3):259–279.
- Arnone, S, Loraschi A, Tettamanzi A, et al (1993) A genetic approach to portfolio selection. *Neural Netw World* 3(6):597–604.
- Artzner, P, Delbaen F, Eber J-M, Heath D (1999) Coherent measures of risk. *Math Financ* 9(3):203–228.
- Baixauli-Soler, JS, Alfaro-Cid E, Fernández-Blanco MO (2010) Several risk measures in portfolio selection: Is it worthwhile?. *Span J Financ Acc/Rev Española de Financiación y Contabilidad* 39(147):421–444.
- Baixauli-Soler, JS, Alfaro-Cid E, Fernandez-Blanco MO (2012) A naïve approach to speed up portfolio optimization problem using a multiobjective genetic algorithm. *Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa* 18(2):126–131.
- Ballester, E, Pla-Santamaria D (2005) Grading the performance of market indicators with utility benchmarks selected from footsie: a 2000 case study. *Appl Econ* 37(18):2147–2160.
- Bergmann, B, Hommel G (1988) Improvements of general multiple test procedures for redundant systems of hypotheses In: *Multiple Hypothesenprüfung/Multiple Hypotheses Testing*, 100–115.. Springer, Berlin.
- Bruni, R, Cesarone F, Scozzari A, Tardella F (2016) Real-world datasets for portfolio selection and solutions of some stochastic dominance portfolio models. *Data Brief* 8:858–862.
- Calvo, B, Santafé RG (2016) scmamp: Statistical comparison of multiple algorithms in multiple problems. *R J* 8(1):248–256.

- Chang, T-J, Meade N, Beasley JE, Sharaiha YM (2000) Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Comput Oper Res* 27(13):1271–1302.
- Chang, T-J, Yang S-C, Chang K-J (2009) Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *Expert Syst Appl* 36(7):10529–10537.
- Chao, X, Kou G, Peng Y (2019) Behavior monitoring methods for trade-based money laundering integrating macro and micro prudential regulation: A case from china. *Technol Econ Dev Econ*. <https://doi.org/10.3846/tede.2019.9383>.
- Chen, Y, Wang X (2015) A hybrid stock trading system using genetic network programming and mean conditional value-at-risk. *Eur J Oper Res* 240(3):861–871.
- Coello, CAC, Lamont GB, Van Veldhuizen DA (2007) *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-objective Problems*. Springer, New York.
- Crama, Y, Schyns M (2003) Simulated annealing for complex portfolio selection problems. *Eur J Oper Res* 150(3):546–571.
- Cumova, D, Nawrocki D (2011) A symmetric lpm model for heuristic mean–semivariance analysis. *J Econ Bus* 63(3):217–236.
- Cura, T (2009) Particle swarm optimization approach to portfolio optimization. *Nonlinear Anal Real World Appl* 10(4):2396–2406.
- Deb, K, Pratap A, Agarwal S, Meyarivan T (2002) A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Trans Evol Comput* 6(2):182–197.
- Derrac, J, García S, Molina D, Herrera F (2011) A practical tutorial on the use of nonparametric statistical tests as a methodology for comparing evolutionary and swarm intelligence algorithms. *Swarm Evol Comput* 1(1):3–18.
- Dueck, G, Winker P (1992) New concepts and algorithms for portfolio choice. *Appl Stoch Model Bus Ind* 8(3):159–178.
- Eftekharian, SE, Shojafar M, Shamsirband S (2017) 2-phase NSGA II: An optimized reward and risk measurements algorithm in portfolio optimization. *Algorithms* 10(4):130.
- Emmerich, MT, Deutz AH (2018) A tutorial on multiobjective optimization: fundamentals and evolutionary methods. *Nat Comput* 17(3):585–609.
- Ergu, D, Kou G, Shi Y, Shi Y (2014) Analytic network process in risk assessment and decision analysis. *Comput Oper Res* 42:58–74.
- Ertenlice, O, Kalayci CB (2018) A survey of swarm intelligence for portfolio optimization: Algorithms and applications. *Swarm Evol Comput* 39:36–52.
- Estrada, J (2008) Mean-semivariance optimization: A heuristic approach. *J Appl Financ* 18(1):57–72.
- Fishburn, PC (1977) Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns. *Am Econ Rev* 67(2):116–126.
- Gaivoronski, AA, Pflug G (2005) Value-at-risk in portfolio optimization: properties and computational approach. *J Risk* 7(2):1–31.
- Garcia, S, Fernández A, Luengo J, Herrera F (2010) Advanced nonparametric tests for multiple comparisons in the design of experiments in computational intelligence and data mining: Experimental analysis of power. *Inf Sci* 180(10):2044–2064.
- Gen, M, Cheng R (2000) *Genetic Algorithms and Engineering Optimization*, vol 7. Wiley, New York.
- Gilli M, KE, Hysi H (2006) A data-driven optimization heuristic for downside risk minimization. *J Risk* 8(3):1–18.
- Guerard, JB (2009) *Handbook of Portfolio Construction: Contemporary Applications of Markowitz Techniques*. Springer, New York.
- Hinterding, R (1995) Gaussian mutation and self-adaption for numeric genetic algorithms In: *Evolutionary Computation, 1995.*, IEEE International Conference On, vol. 1, 384–389.. IEEE Press, Piscataway.
- Hochreiter, R (2007) An evolutionary computation approach to scenario-based risk-return portfolio optimization for general risk measures In: *Workshops on Applications of Evolutionary Computation*. LNCS, vol. 4448, 199–207.. Springer, Heidelberg.

- Hogan, WW, Warren JM (1972) Computation of the efficient boundary in the es portfolio selection model. *J Financ Quant Anal* 7(4):1881–1896.
- Huang, Y, Kou G (2014) A kernel entropy manifold learning approach for financial data analysis. *Decis Support Syst* 64:31–42.
- Huang, Y, Kou G, Peng Y (2017) Nonlinear manifold learning for early warnings in financial markets. *Eur J Oper Res* 258(2):692–702.
- Jiang, S, Ong Y-S, Zhang J, Feng L (2014) Consistencies and contradictions of performance metrics in multiobjective optimization. *IEEE Trans Cybern* 44(12):2391–2404.
- Kalayci, CB, Ertenlice O, Akbay MA (2019) A comprehensive review of deterministic models and applications for mean-variance portfolio optimization. *Expert Syst Appl* 125:345–368.
- Konno, H, Waki H, Yuuki A (2002) Portfolio optimization under lower partial risk measures. *Asia-Pac Financ Mark* 9(2):127–140.
- Kou, G (2019) Machine learning methods combined with financial systemic risk. *Technol Econ Dev Econ*. <https://doi.org/10.3846/tede.2019.8740>.
- Krink, T, Paterlini S (2011) Multiobjective optimization using differential evolution for real-world portfolio optimization. *Comput Manag Sci* 8(1-2):157–179.
- Krokhmal, P, Palmquist J, Uryasev S (2002) Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. *J Risk* 4:43–68.
- Larsen, N, Mausser H, Uryasev S (2002) Algorithms for optimization of value-at-risk In: *Financial Engineering, E-commerce and Supply Chain*, 19–46.. Springer, Boston.
- Li, H, Zhang Q (2009) Multiobjective optimization problems with complicated pareto sets, MOEA/D and NSGA-II. *IEEE Trans Evol Comput* 13(2):284–302.
- Liagkouras, K, Metaxiotis K (2013) The constrained mean-semivariance portfolio optimization problem with the support of a novel multiobjective evolutionary algorithm. *J Softw Eng Appl* 6(07):22–29.
- Liagkouras, K, Metaxiotis K (2015) Efficient portfolio construction with the use of multiobjective evolutionary algorithms: best practices and performance metrics. *Int J Inf Technol Dec Making* 14(03):535–564.
- Lim, C, Serali HD, Uryasev S (2010) Portfolio optimization by minimizing conditional value-at-risk via nondifferentiable optimization. *Comput Optim Appl* 46(3):391–415.
- Liu, J-L, Chou C-W, Chen C-M (2010) Optimising mobile base station placement using an enhanced multi-objective genetic algorithm. *Int J Bus Intell Data Mining* 5(1):19–42.
- Macedo, LL, Godinho P, Alves MJ (2017) Mean-semivariance portfolio optimization with multiobjective evolutionary algorithms and technical analysis rules. *Expert Syst Appl* 79:33–43.
- Markowitz, H (1959) *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Wiley, New York.
- Markowitz, H, Todd P, Xu G, Yamane Y (1993) Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm. *Ann Oper Res* 45(1):307–317.
- Meghwani, SS, Thakur M (2017) Multi-criteria algorithms for portfolio optimization under practical constraints. *Swarm Evol Comput* 37:104–125.
- Meghwani, SS, Thakur M (2018) Multi-objective heuristic algorithms for practical portfolio optimization and rebalancing with transaction cost. *Appl Soft Comput* 67:865–894.
- Metaxiotis, K, Liagkouras K (2012) Multiobjective evolutionary algorithms for portfolio management: A comprehensive literature review. *Expert Syst Appl* 39(14):11685–11698.
- Meucci, A (2009) *Risk and Asset Allocation*. Springer, Berlin.
- Mezura-Montes, E, Coello CAC (2011) Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: past, present and future. *Swarm Evol Comput* 1(4):173–194.
- Mishra, SK, Panda G, Majhi R (2014) A comparative performance assessment of a set of multiobjective algorithms for constrained portfolio assets selection. *Swarm Evol Comput* 16:38–51.
- Mühlenbein, H, Schlierkamp-Voosen D (1993) Predictive models for the breeder genetic algorithm i continuous parameter optimization. *Evol Comput* 1(1):25–49.



- Nawrocki, DN (1991) Optimal algorithms and lower partial moment: ex post results. *Appl Econ* 23(3):465–470.
- Nawrocki, DN (1999) A brief history of downside risk measures. *J Invest* 8:9–25.
- Ponsich, A, Jaimes AL, Coello CAC (2013) A survey on multiobjective evolutionary algorithms for the solution of the portfolio optimization problem and other finance and economics applications. *IEEE Trans Evol Comput* 17(3):321–344.
- Qin, Q, Li L, Cheng S (2014) A novel hybrid algorithm for mean-cvar portfolio selection with real-world constraints In: *Conference in Swarm Intelligence*, 319–327.. Springer, Cham.
- Rockafellar, RT, Uryasev S (2002) Conditional value-at-risk for general loss distributions. *J Bank Financ* 26(7):1443–1471.
- Rockafellar, RT, Uryasev S, et al (2000) Optimization of conditional value-at-risk. *J Risk* 2:21–42.
- Sarykalin, S, Serraino G, Uryasev S (2008) Value-at-risk vs. conditional value-at-risk in risk management and optimization In: *State-of-the-Art Decision-Making Tools in the Information-Intensive Age*, Tutor Oper Res, 270–29.. INFORMS, Catonsville.
- Schott, JR (1995) Fault tolerant design using single and multicriteria genetic algorithm optimization. Master's thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- Schwefel, HP (1987) Collective Phenomena in Evolutionary Systems In: *Preprints of the 31st Annual Meeting of the International Society for General System Research*, 1025–1033, Budapest.
- Senhaji, K, El Moutaouakil K, Ettaouil M (2016) Portfolio selection problem: New multicriteria approach for the mean-semivariance model In: *Logistics Operations Management (GOL)*, 2016 3rd International Conference On, 1–6.. IEEE Press, Piscataway.
- Sing, TF, Ong SE (2000) Asset allocation in a downside risk framework. *J Real Estate Portfolio Manag* 6(3):213–223.
- Steuer, RE, Qi Y, Hirschberger M (2005) Multiple objectives in portfolio selection. *J Financ Dec Making* 1(1):5–20.
- Subbu, R, Bonissone PP, Eklund N, Bollapragada S, Chalermkraivuth K (2005) Multiobjective financial portfolio design: A hybrid evolutionary approach In: *Evolutionary Computation, 2005. The 2005 IEEE Congress On*, vol. 2, 1722–1729.. IEEE Press, Piscataway.
- Whitley, D (1988) Genitor: A different genetic algorithm In: *Proc. Rocky Mountain Conference on Artificial Intelligence*, 118–130.. Colorado Institute for Artificial Intelligence, Denver, Colorado.
- Woodside-Oriakhi, M, Lucas C, Beasley JE (2011) Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier. *Eur J Oper Res* 213(3):538–550.
- Yamai, Y, Yoshida T, et al (2002) Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk: their estimation error, decomposition, and optimization. *Monet Econ Stud* 20(1):87–121.
- Zhang, H, Kou G, Peng Y (2019) Soft consensus cost models for group decision making and economic interpretations. *Eur J Oper Res* 277(3):964–980.
- Zhang, Q, Li H (2007) MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Trans Evol Comput* 11(6):712–731.
- Zhou, A, Jin Y, Zhang Q, Sendhoff B, Tsang E (2006) Combining model-based and genetics-based offspring generation for multi-objective optimization using a convergence criterion In: *Evolutionary Computation, 2006. CEC 2006. IEEE Congress On*, 892–899.. IEEE Press, Piscataway.
- Zitzler, E, Laumanns M, Thiele L (2001) SPEA 2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm. TIK-report 103. ETH Zurich, Zurich.
- Zitzler, E, Thiele L (1999) Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength pareto approach. *IEEE Trans Evol Comput* 3(4):257–271.

**TRANSLATED VERSION: SPANISH**

Below is a rough translation of the insights presented above. This was done to give a general understanding of the ideas presented in the paper. Please excuse any grammatical mistakes and do not hold the original authors responsible for these mistakes.

## **VERSION TRADUCIDA: ESPAÑOL**

A continuación se muestra una traducción aproximada de las ideas presentadas anteriormente. Esto se hizo para dar una comprensión general de las ideas presentadas en el documento. Por favor, disculpe cualquier error gramatical y no responsabilite a los autores originales de estos errores.

## **INTRODUCCIÓN**

El problema de selección de carteras se puede definir como la asignación óptima de la riqueza entre un número finito de activos que sigue el procesamiento cuidadoso de toda la información disponible sobre inversores y mercados (Meucci 2009). El modelo de varianza media de Markowitz es, con mucho, el procedimiento más popular en la asignación de activos (Guerard 2009). Incluso si se considera la piedra angular en este campo, el modelo de optimización de la cartera de varianza media presenta dos inconvenientes graves desde un punto de vista teórico. En primer lugar, cuando los rendimientos de los activos son sesgados y cola de grasa, tienden a incluir sólo una proporción limitada de activos estocásticamente dominantes en las soluciones eficientes, y prematuramente excluyen el activo con rendimientos negativamente sesgados. En segundo lugar, el riesgo se mide por varianza, que trata tanto los rendimientos objetivo anteriores como los inferiores por igual, mientras que los inversores están más preocupados por la probabilidad de que los rendimientos de la inversión caigan por debajo del rendimiento objetivo. En consecuencia, los riesgos son subestimados y se descartan carteras que son eficientes a la baja.

Una solución propuesta en la literatura para hacer más eficaz el enfoque de Markowitz es reemplazar la varianza por una medida de riesgo a la baja para modelar la aversión a la pérdida de los inversores correctamente. En este contexto, la semi-varianza se ha estudiado extensamente (Nawrocki 1999; Sing y Ong 2000). Dos razones principales justifican estos esfuerzos. En primer lugar, la semi-varianza es una aproximación de la asimetría para la distribución de retorno, ya que mide los retornos por debajo del objetivo. Cuanto mayor es el valor de la semi-varianza, mayor será tanto el grado de asimetría negativa como el riesgo de la inversión. En segundo lugar, las carteras eficientes de semi-varianza se aproximan al conjunto eficiente de dominancia estocástica. Sin embargo, el cálculo de la semirrenunciación de la cartera es una tarea difícil debido a la naturaleza endógena de la matriz de co-varianza de la cartera, que depende de las ponderaciones asignadas a cada activo, es decir, los cambios en las ponderaciones afectan a los períodos en los que la cartera tiene un rendimiento inferior al nivel objetivo, lo que, a su vez, afecta a la evaluación de la propia matriz de co-semi-varianza. Se han propuesto algunos intentos para resolver este problema directamente (Hogan y Warren 1972; 2002; Markowitz 1959; 1993). Otros estudios se han centrado en la definición de una matriz de co-semi-varianza exógena que se acerque satisfactoriamente a la endógena (Ballester y Pla-Santamaria 2005; Cumova y Nawrocki 2011; Estrada 2008; Nawrocki 1991). Hoy en día, debido a la importancia regulatoria de cuantificar grandes pérdidas en banca y seguros, otra clase de medidas de riesgo a la baja, llamadas medidas basadas en cuacililes, ocupa una posición de liderazgo en el sector de la gestión de riesgos. Uno de los ejemplos más populares es el valor en riesgo (var), definido como la pérdida máxima que se produce durante un período determinado en un nivel de confianza determinado. Aunque var es aparentemente fácil de usar e intuitivo, presenta varias desventajas. Principalmente, ignora las pérdidas que superan el var y no es sub-aditivo, es decir, la diversificación de la cartera puede aumentar el var (Artzner et al. 1999). Desde una perspectiva computacional, var es difícil de usar cuando los inversores quieren optimizar sus carteras, ya que está representado por una función no lineal, no convexa y no diferenciable con múltiples óptima locales (Gaivoronski y Pflug 2005). Además, los agentes racionales que deseen actuar sobre sus decisiones de acuerdo con la teoría de utilidad esperada pueden ser engañados por la información relacionada con la cartera var (Yamai et al. 2002). Para hacer frente a estas deficiencias, (Rockafellar et al. 2000) introdujo el valor condicional en riesgo (cvar), que se

define como la expectativa condicional de pérdidas por encima del var (Sarykalin et al. 2008). El cvar es una medida de riesgo coherente en el sentido de (Artzner et al. 1999) y, debido a que es una función convexa, los problemas de optimización con cvar como el objetivo de minimización y / o restricciones pueden ser manejados eficientemente (Krokhmal et al. 2002; 2002; Rockafellar y Uryasev 2002).

La creciente complejidad de las aplicaciones prácticas ha llevado a los investigadores a desarrollar procedimientos heurísticos para resolver sus problemas de optimización de cartera. Estas técnicas requieren que se tenga en cuenta menos información de dominio que los métodos de programación matemática basados en degradado estándar. Además, garantizan aproximaciones satisfactorias a las soluciones en un tiempo computacional justo, incluso cuando se ocupan de las variables de decisión no convexidad, discontinuidad y enteros. Los enfoques que se han propuesto en la literatura de computación suave se pueden clasificar en los dos grupos siguientes. Por un lado, los métodos objetivos únicos optimizan una suma ponderada de los objetivos de la cartera. Por otro lado, los algoritmos evolutivos multitrás (EUROPE) intentan abordar el problema de la asignación directamente en su forma multi-objetiva optimizando simultáneamente el riesgo y la recompensa. En el primer caso, el conjunto completo de perfiles de rentabilidad de riesgo se obtiene variando un parámetro que representa la aversión al riesgo del inversor (Chang et al. 2000; Crama y Schyns 2003; Cura 2009; Woodside-Oriakhi et al. 2011). En el segundo caso, la frontera totalmente eficiente está representada en una sola carrera (Anagnostopoulos y Mamanis 2011a; Meghwani y Thakur 2017; 2014). Ambas categorías prestan gran atención a los tipos de codificación y a las técnicas de manejo de restricciones (Liagkouras y Metaxiotis 2015; Meghwani y Thakur 2017; Metaxiotis y Liagkouras 2012; 2013). Algunas situaciones de la vida real, que no se consideran en el modelo de Markowitz, han sido analizadas recientemente por (Eftekharian et al. 2017) y (Meghwani y Thakur 2018). (Eftekharian et al. 2017) incluyen como restricciones algunas restricciones sobre el número de activos en la cartera, limitaciones en la inversión en activos de una industria determinada y restricciones de cardinalidad, clase y cantidad. Además, desarrollaron una versión mejorada del algoritmo NSGA II, llamado NSGA II de 2 fases, para resolver el problema de optimización resultante. Meghwani y Thakur (2018) se centran en el problema de manejar las restricciones de igualdad, como las restricciones de autofinanciación, y las restricciones derivadas de la inclusión de modelos de costos de transacción utilizando MOEA. Los investigadores también se han centrado en los llamados métodos de inteligencia de enjambre para superar las dificultades computacionales de los diseños de cartera realistas. A diferencia de los algoritmos evolutivos que utilizan el principio de selección natural, estos enfoques se inspiran en el comportamiento y la interacción autoorganización entre los agentes, como la alimentación de colonias de hormigas y abejas, el rebaño de aves y la escolarización de peces (véase Ertenlice y Kalayci (2018) para una revisión detallada del tema).

En las últimas décadas, los algoritmos de aprendizaje automático se han utilizado ampliamente para explorar datos financieros y hacer predicciones basadas en datos (Chao et al. 2019; Kou 2019). Por ejemplo, (Huang y Kou 2014) presentan un algoritmo de aprendizaje múltiple de entropía del núcleo para medir las relaciones entre dos puntos de datos financieros con el fin de describir las características de un sistema financiero mediante la derivación de las propiedades dinámicas del espacio de datos original. Del mismo modo, (Huang et al. 2017) proponen un algoritmo de aprendizaje múltiple basado en métricas de información para extraer el colector intrínseco de un sistema financiero dinámico y detectar crisis inminentes. (Ergu et al. 2014) se centran en el uso del proceso de red analítica en la evaluación de riesgos y el análisis de decisiones de un evento emergente. Proponen un nuevo índice de coherencia para evaluar los factores clave de los riesgos y analizar los impactos y preferencias de las alternativas de decisión. (2019) desarrollan tres modelos de costo mínimo suave basados en diferentes operadores de promedio ponderado para resolver problemas de toma de decisiones consensuados. La utilidad de los modelos propuestos se valida en un problema de consenso de préstamos del mundo real, utilizando datos de una plataforma P2P china.

(2019) revisan los métodos de vanguardia dedicados a la optimización de la cartera de varianza media.

Los cálculos evolutivos se realizan mediante iteraciones y, en cada iteración, los pesos de las carteras se conocen a priori porque son generados por el algoritmo. Por lo tanto, es posible determinar directamente en qué períodos la cartera tiene un rendimiento inferior al nivel objetivo. De esta manera, la dificultad de

calcular la semi-varianza de la cartera ex post puede ser resuelta fructíferamente mediante el uso de un algoritmo evolutivo. Uno de los primeros estudios en intentar esto es (Dueck y Winker 1992), que reformular el problema de optimización bi-objetivo en un solo objetivo y resolverlo a través de una técnica de búsqueda local, llamada umbral de aceptación. De manera similar, (Arnone et al. 1993) proponen una solución a un problema de programación paramétrico con el objetivo de optimizar una combinación convexa de media y semi-varianza. El algoritmo se basa en el sistema GENITOR de Whitley (Whitley 1988) y utiliza una estrategia de reproducción de estado estacionario y una selección elitista. (2009) aplican un algoritmo genético a los problemas de optimización de la cartera en diferentes medidas de riesgo, a saber, la varianza, la semi-varianza, la desviación absoluta y la varianza con la asimetría. Recientemente, (Liagkouras y Metaxiotis 2013) abordan el problema de optimización de la cartera de media-semi-varianza desde una perspectiva multi-objetiva mediante el desarrollo de un algoritmo evolutivo ad hoc. La evidencia de la robustez del algoritmo se logra en las pruebas fuera de muestra durante las condiciones del mercado de toros y osos en el FTSE 100. (2017) comparan el algoritmo genético de clasificación II no dominado (NSGA-II, Deb et al. (2002)) y la fuerza Pareto algoritmo evolutivo 2 (SPEA 2, Zitzler et al. (2001)) dentro del marco de optimización de la cartera de media-semi-varianza. Los experimentos numéricos indican que NSGA-II supera a SPEA 2 en la muestra. (2016) proponen resolver el problema combinando la red neuronal Hopfield continua con NSGA-II. La eficacia de esta estrategia se demuestra utilizando una cartera de 20 activos.

En cuanto a los problemas de minimización basados en cuacililes que afectan a muchos instrumentos financieros, es necesario un gran número de escenarios de precios para estimar el riesgo correctamente. A medida que aumenta la dimensión de los problemas, esta operación puede llevar mucho tiempo (Lim et al. 2010) y el uso de la heurística puede ser aconsejable o incluso necesario para detectar una solución. Un ejemplo es proporcionado por la heurística de optimización basada en datos multipropósito propuesta en Gilli M y Hysi (2006), que se ocupa de diferentes funciones de riesgo, como var, cvar, pérdida máxima y Omega, así como con restricciones prácticas en la composición de la cartera. (Hochreiter 2007) desarrolla un enfoque de cálculo evolutivo para resolver el problema general de optimización de la cartera de riesgo-retorno basado en escenarios cuando se utiliza la desviación estándar, var o cvar para representar el riesgo de la inversión. Una variante del algoritmo NSGA-II basada en operadores diferenciales es desarrollada por (Krink y Paterlini 2011) para la optimización de la cartera que implica restricciones del mundo real y medidas de riesgo basadas en cuantiles. Mientras tanto, se realiza una comparación de las capacidades de los diferentes MOEE para adaptarse en cualquier adición de nuevas restricciones y/o sustitución de la función de riesgo (Anagnostopoulos y Mamanis 2011b), y (Baixauli-Soler et al. 2012) se centran en el rendimiento spea 2. Recientemente, los sistemas híbridos de comercio de acciones basados en metaheurística evolutiva y modelos de cvar medio se proponen en Chen y Wang (2015) y (Qin et al. 2014).

La contribución de este estudio es doble. Por un lado, sobre la base de los resultados prometedores de (Subbu et al. 2005) y (Baixauli-Soler et al. 2010), incluimos en el mismo marco de optimización de cartera la actitud de pérdida-aversión de los inversores, así como los requisitos de capital impuestos por el regulador, e investigamos la relación entre la semi-varianza y el cvar en la cuantificación del riesgo a la baja. Por otro lado, ampliamos la investigación de (Liu et al. 2010) e investigamos la eficacia del uso del esquema de selección uniforme, el operador de crossover intermedio extendido (Gen y Cheng 2000; Mehlenbein y Schlierkamp-Voosen 1993), y la mutación gaussiana (Hinterding 1995; Schwefel 1987) en los algoritmos NSGA-II y SPEA 2 con el fin de generar los frentes Pareto aproximados para los problemas de optimización de cartera basados en el riesgo considerados a la baja. Además, el rendimiento de los algoritmos propuestos se compara con el de otras variantes de los algoritmos NSGA-II y SPEA 2 que ya han demostrado ser altamente competitivos en problemas de optimización de cartera. Los resultados en cinco conjuntos de datos disponibles públicamente muestran que nuestros procedimientos dominan completamente los frentes producidos por las contrapartes a partir de la literatura. Además, nuestras variantes de los algoritmos NSGA-II y SPEA 2 pueden generar todo el frente de Pareto para problemas a gran escala para los que los otros enfoques basados en Pareto no pueden funcionar correctamente.

El resto del documento se organiza de la siguiente manera. En la sección "El problema de selección de carteras bajo medidas de riesgo a la baja", introducimos tres relaciones de preferencia basadas en el

principio de riesgo de recompensa y desventaja y analizamos los problemas de selección de cartera relacionados. La sección "Algoritmos evolutivos basados en Pareto" presenta una descripción de los MOEE utilizados para resolver los problemas de optimización resultantes. La sección "Análisis experimental" describe los experimentos numéricos y la sección "Observaciones finales e investigaciones futuras" presenta observaciones e ideas finales para la investigación posterior.

## **CONCLUSIÓN**

En este estudio, describimos tres casos del problema de selección de cartera diseñado para manejar el riesgo a la baja de una inversión correctamente. Se presentó un marco flexible multi-objetivo de recompensa a riesgo en el que los rendimientos esperados, la semi-varianza y el cvar de una cartera se pueden optimizar simultáneamente. Estos problemas se abordaron utilizando dos algoritmos de clasificación no dominados, a saber, NSGA-II y SPEA 2, que ya han mostrado un rendimiento competitivo para el problema de varianza media. En particular, propusimos una nueva combinación de operadores para las fases de selección y reproducción que se incluirán en ambos algoritmos. Se realizó un análisis comparativo con respecto a una segunda variante de los mismos algoritmos, que implica otro diseño de configuración. Utilizamos cinco conjuntos de datos disponibles públicamente que van desde problemas de optimización de carteras de pequeño a gran tamaño. Las capacidades de los procedimientos se evaluaron en términos de cuatro métricas de rendimiento. Por último, un conjunto de pruebas estadísticas comprobó la solidez de estos hallazgos. En general, los experimentos numéricos mostraron que los algoritmos propuestos superaron a los demás con respecto a todos los criterios. Incluso si los algoritmos con la nueva configuración de variación exigían el uso de más tiempo computacional a medida que aumentaba la dimensión de los problemas, sin embargo dieron resultados razonables para los casos en los que los otros algoritmos no lograban capturar la forma del frente de Pareto correctamente.

Estos resultados de la investigación se pueden poner en práctica para mejorar la infraestructura de gestión de riesgos de una empresa de inversión. La inclusión de varias medidas de riesgo en el proceso de optimización de la cartera puede aumentar las capacidades del sistema para describir el riesgo, proporcionando oportunidades de inversión más atractivas.

El trabajo de investigación futura sobre el tema incluye el análisis de la eficacia fuera de la muestra para este tipo de estrategia, que se espera que se mejore mediante la incorporación de otras técnicas de simulación para estimar la semi-varianza y el cvar. También estamos interesados en explorar mecanismos que exploten adaptativamente varios esquemas de selección y operadores de reproducción para acelerar la convergencia y permitir que la búsqueda se detenga automáticamente cuando se haya alcanzado un nivel adecuado de calidad para el conjunto aproximado.

## **TRANSLATED VERSION: FRENCH**

Below is a rough translation of the insights presented above. This was done to give a general understanding of the ideas presented in the paper. Please excuse any grammatical mistakes and do not hold the original authors responsible for these mistakes.

## **VERSION TRADUITE: FRANÇAIS**

Voici une traduction approximative des idées présentées ci-dessus. Cela a été fait pour donner une compréhension générale des idées présentées dans le document. Veuillez excuser toutes les erreurs grammaticales et ne pas tenir les auteurs originaux responsables de ces erreurs.

## **INTRODUCTION**

Le problème de la sélection des portefeuilles peut être défini comme l'allocation optimale de la richesse entre un nombre limité d'actifs qui suit un traitement minutieux de toutes les informations disponibles sur les investisseurs et les marchés (Meucci, 2009). Le modèle de variance moyenne de Markowitz est de loin

la procédure la plus populaire en matière de répartition de l'actif (Guerard, 2009). Même s'il est considéré comme la pierre angulaire dans ce domaine, le modèle d'optimisation du portefeuille à variation moyenne présente deux inconvénients sérieux d'un point de vue théorique. Premièrement, lorsque les rendements des actifs sont faussés et à queue grasse, ils ont tendance à n'inclure qu'une proportion limitée d'actifs stochastiquement dominants dans les solutions efficaces, et empêchent prématurément l'actif avec des rendements biaisés négativement. Deuxièmement, le risque est mesuré par l'écart, qui traite également les rendements cibles ci-dessus et inférieurs, tandis que les investisseurs sont plus préoccupés par la probabilité que les rendements des placements soient inférieurs au rendement cible. Par conséquent, les risques sont sous-estimés et les portefeuilles qui sont efficaces sur le plan des baisses sont exclus.

Une solution proposée dans la littérature pour rendre l'approche de Markowitz plus efficace est de remplacer la variance par une mesure du risque à la baisse afin de modéliser correctement l'aversion pour les pertes des investisseurs. Dans ce contexte, la semi-variance a fait l'objet d'études approfondies (Nawrocki, 1999; Sing et Ong, 2000). Deux raisons principales justifient ces efforts. Premièrement, la semi-variance est une approximation de la biaise pour la distribution du rendement, puisqu'elle mesure les rendements inférieurs à la cible. Plus la valeur de la semi-variance est élevée, plus le degré de biais négatif et le risque de l'investissement sont élevés. Deuxièmement, les portefeuilles efficaces en semi-variance se rapprochent de près de l'ensemble efficace de dominance stochastique. Toutefois, le calcul de la semi-variance du portefeuille est une tâche difficile en raison de la nature endogène de la matrice de co-semi-variance du portefeuille, qui dépend des pondérations attribuées à chaque actif, c'est-à-dire que les variations des pondérations affectent les périodes pendant lesquelles le portefeuille sous-performe le niveau cible, ce qui, à son tour, affecte l'évaluation de la matrice de co-semi-variance elle-même. Certaines tentatives ont été proposées pour résoudre ce problème directement (Hogan et Warren, 1972; Konno et coll. 2002; Markowitz, 1959; Markowitz et coll., 1993). D'autres études se sont concentrées sur la définition d'une matrice exogène de co-semi-variance qui approche de manière satisfaisante de l'endogène (Ballestero et Pla-Santamaria 2005 ; Cumova et Nawrocki 2011; Estrada 2008; Nawrocki, 1991). Aujourd'hui, en raison de l'importance réglementaire de quantifier les pertes importantes dans les banques et les assurances, une autre catégorie de mesures de risque à la baisse, appelées mesures quantiles, occupe une position de leader dans le secteur de la gestion des risques. L'un des exemples les plus populaires est la valeur à risque ( $var$ ), définie comme la perte maximale survenant sur une période donnée à un niveau de confiance donné. Bien que  $var$  soit apparemment facile à utiliser et intuitif, il présente plusieurs inconvénients. Il ne tient pas compte principalement des pertes dépassant  $var$  et n'est pas sous-additif, c'est-à-dire que la diversification du portefeuille peut augmenter  $var$  (Artzner et coll., 1999). D'un point de vue informatique,  $var$  est difficile à utiliser lorsque les investisseurs veulent optimiser leurs portefeuilles, puisqu'il est représenté par une fonction non linéaire, non convexe et non différentiable avec plusieurs optima locales (Gaivoronski et Pflug, 2005). De plus, les agents rationnels qui souhaitent donner suite à leurs décisions selon la théorie des services publics attendus peuvent être induits en erreur par les renseignements relatifs au portefeuille  $var$  (Yamai et coll., 2002). Pour remédier à ces lacunes (Rockafellar et coll., 2000) a introduit la valeur conditionnelle à risque ( $cvar$ ), qui est définie comme l'attente conditionnelle de pertes supérieures au  $var$  (Sarykalin et al., 2008).  $Cvar$  est une mesure cohérente du risque au sens de (Artzner et coll., 1999) et, parce qu'il s'agit d'une fonction convexe, les problèmes d'optimisation avec  $cvar$  comme objectif de minimisation et/ou contraintes peuvent être gérés efficacement (Krokhmal et al., 2002; Larsen et coll. 2002; Rockafellar et Uryasev, 2002).

La complexité croissante des applications pratiques a conduit les chercheurs à développer des procédures heuristiques pour résoudre leurs problèmes d'optimisation de portefeuille. Ces techniques nécessitent moins d'informations de domaine à prendre en compte que les méthodes de programmation mathématique standard basées sur le gradient. En outre, ils garantissent des approximations satisfaisantes des solutions dans un temps de calcul équitable, même lorsqu'elles traitent de variables de non-convexité, de discontinuité et de décision integer. Les approches qui ont été proposées dans la littérature sur l'informatique douce peuvent être classées en deux groupes suivants. D'une part, les méthodes à objectif unique optimisent une somme pondérée des objectifs du portefeuille. D'autre part, les algorithmes évolutifs multi-objectifs (MOEA) tentent de s'attaquer directement au problème de l'allocation sous sa forme multi-

objectifs en optimisant simultanément les risques et les récompenses. Dans le premier cas, l'ensemble complet des profils de rendement du risque est obtenu en variant un paramètre qui représente l'aversion au risque de l'investisseur (Chang et coll., 2000; Crama et Schyns, 2003; Cura 2009; Woodside-Oriakhi et coll. 2011). Dans le second cas, la frontière efficace complète est représentée en une seule course (Anagnostopoulos et Mamanis 2011a; Meghwani et Thakur 2017; Mishra et coll. 2014). Les deux catégories prêtent une grande attention aux types d'encodage et aux techniques de contrainte-manipulation (Liagkouras et Metaxiotis 2015 ; Meghwani et Thakur 2017; Metaxiotis et Liagkouras 2012; Ponsich et coll. 2013). Certaines situations réelles, qui ne sont pas prises en compte dans le modèle de Markowitz, ont été analysées récemment par (Eftekharian et coll. 2017) et (Meghwani et Thakur 2018). (Eftekharian et coll. 2017) comprennent comme contraintes certaines restrictions sur le nombre d'actifs dans le portefeuille, les limitations de l'investissement dans des actifs d'une industrie donnée, et les contraintes de cardinalité, de classe et de quantité. En outre, ils ont développé une version améliorée de l'algorithme NSGA II, appelé NSGA II à 2 phases, pour résoudre le problème d'optimisation qui en résulte. Meghwani et Thakur (2018) se concentrent sur le problème de la gestion des contraintes d'égalité, comme les contraintes d'autofinancement, et les contraintes découlant de l'inclusion de modèles de coûts de transaction à l'aide d'ao. Les chercheurs se sont également concentrés sur les méthodes dites d'intelligence d'essaim pour surmonter les difficultés de calcul des conceptions réalistes de portefeuille. Contrairement aux algorithmes évolutifs qui utilisent le principe de la sélection naturelle, ces approches s'inspirent du comportement et de l'interaction auto-organisation entre agents, tels que la recherche de nourriture des colonies de fourmis et d'abeilles, le flocage d'oiseaux et l'école des poissons (voir Ertenlice et Kalayci (2018) pour un examen détaillé du sujet).

Au cours des dernières décennies, les algorithmes d'apprentissage automatique ont été largement utilisés pour explorer les données financières et faire des prédictions axées sur les données (Chao et al., 2019; Kou 2019). Par exemple, (Huang et Kou 2014) présentent un algorithme d'apprentissage multiple de l'entropie du noyau pour mesurer les relations entre deux points de données financières afin de décrire les caractéristiques d'un système financier en tirant les propriétés dynamiques de l'espace de données d'origine. De même, (Huang et coll. 2017) proposent un algorithme d'apprentissage multiple basé sur des mesures d'information pour extraire le multiple intrinsèque d'un système financier dynamique et détecter les crises imminentes. (Ergu et coll. 2014) mettent l'accent sur l'utilisation du processus du réseau analytique dans l'évaluation des risques et l'analyse des décisions d'un événement émergent. Ils proposent un nouvel indice de cohérence pour évaluer les facteurs clés des risques et analyser les impacts et les préférences des solutions de rechange à la décision. Zhang et coll. (2019) élaborent trois modèles de coûts minimaux souples basés sur des opérateurs moyens pondérés différents pour résoudre les problèmes de prise de décision consensuelle. L'utilité des modèles proposés est validée par un problème de consensus sur les prêts dans le monde réel, à l'aide des données d'une plate-forme P2P chinoise.

Kalayci et coll. (2019) examinent des méthodes de pointe dédiées à l'optimisation du portefeuille de variance moyenne.

Les calculs évolutifs sont effectués par itérations et, dans chaque itération, les pondérations des portefeuilles sont connues a priori parce qu'elles sont générées par l'algorithme. Ainsi, il est possible de déterminer directement dans quelles périodes le portefeuille sous-performe le niveau cible. De cette façon, la difficulté de calculer la semi-variance ex-post portfolio peut être résolue de manière fructueuse par l'utilisation d'un algorithme évolutif. L'une des premières études à tenter cette tentative est (Dueck et Winker, 1992), qui reformulent le problème d'optimisation bi-objectif en un seul objectif et le résolvent au moyen d'une technique de recherche locale, appelée seuil acceptant. De la même façon (Arnone et coll., 1993) proposent une solution à un problème de programmation paramétrique dans le but d'optimiser une combinaison convexe de moyenne et de semi-variance. L'algorithme est basé sur le système GENITOR de Whitley (Whitley, 1988) et utilise une stratégie d'élevage à état stable et une sélection élitiste. Chang et coll. (2009) appliquent un algorithme génétique aux problèmes d'optimisation du portefeuille dans différentes mesures du risque, à savoir la variance, la semi-variance, l'écart absolu et la variance avec la biaisation. Récemment, (Liagkouras et Metaxiotis 2013) abordent le problème d'optimisation du portefeuille moyen semi-variance d'un point de vue multi-objectif en développant un algorithme évolutif

ad hoc. La preuve de la robustesse de l'algorithme est réalisée dans des tests hors échantillon pendant les conditions du marché haussier et baissier sur le FTSE 100. Macedo et coll. (2017) comparent l'algorithme génétique de tri non dominé II (NSGA-II, Deb et coll. (2002)) et la force pareto evolutionary Algorithm 2 (SPEA 2, Zitzler et coll. (2001)) dans le cadre d'optimisation du portefeuille moyen-semi-variance. Des expériences numériques indiquent que NSGA-II surpasse SPEA 2 dans l'échantillon. Senhaji et coll. (2016) proposent de résoudre le problème en combinant le réseau neuronal hopfield continu avec NSGA-II. L'efficacité de cette stratégie est prouvée à l'aide d'un portefeuille de 20 actifs.

En ce qui concerne les problèmes de minimisation quantile impliquant de nombreux instruments financiers, un grand nombre de scénarios de prix sont nécessaires pour estimer correctement le risque. À mesure que la dimension des problèmes augmente, cette opération peut prendre beaucoup de temps (Lim et al., 2010) et l'utilisation de l'heuristique peut être souhaitable, voire nécessaire, pour détecter une solution. Un exemple est fourni par l'heuristique d'optimisation axée sur les données polyvalentes proposée dans Gilli M et Hysi (2006), qui traite de différentes fonctions de risque, telles que var, cvar, perte maximale et Omega, ainsi que des contraintes pratiques sur la composition du portefeuille. Une approche de calcul évolutive est développée par (Hochreiter 2007) pour résoudre le problème général d'optimisation du portefeuille risque-rendement basé sur des scénarios lorsque l'écart type, var, ou cvar sont utilisés pour représenter le risque de l'investissement. Une variante de l'algorithme NSGA-II basée sur les opérateurs différentiels est développée par (Krink et Paterlini 2011) pour l'optimisation du portefeuille impliquant des contraintes réelles et des mesures de risque quantiles. Entre-temps, une comparaison des capacités des différents MOEA à s'adapter à toute addition de nouvelles contraintes et/ou de remplacement de la fonction de risque est donnée dans (Anagnostopoulos et Mamanis 2011b), et (Baixauli-Soler et autres 2012) se concentrent sur la performance SPEA 2. Récemment, des systèmes hybrides d'échange d'actions basés sur des modèles métaheuristiques évolutifs et moyen-cvar sont proposés dans Chen et Wang (2015) et (Qin et coll. 2014).

La contribution de cette étude est double. D'une part, sur la base des résultats prometteurs de (Subbu et coll. 2005) et (Baixauli-Soler et coll. 2010), nous incluons dans le même cadre d'optimisation de portefeuille l'attitude d'aversion aux pertes des investisseurs ainsi que les exigences de fonds propres imposées par le régulateur, et nous étudions la relation entre la semi-variance et cvar dans la quantification du risque baissier. D'autre part, nous étendons les recherches de (Liu et coll. 2010) et étudions l'efficacité de l'utilisation du système uniforme de sélection, l'opérateur multisegment intermédiaire étendu (Gen et Cheng, 2000; Mühlenbein et Schlierkamp-Voosen, 1993), et la mutation gaussienne (Hinterding, 1995; Schwefel 1987) dans les algorithmes NSGA-II et SPEA 2 afin de générer les fronts pareto approximatifs pour les problèmes d'optimisation du portefeuille considérés comme basés sur le risque à la baisse. En outre, les performances des algorithmes proposés sont comparées à celles d'autres variantes des algorithmes NSGA-II et SPEA 2 qui se sont déjà montrées très compétitives dans les problèmes d'optimisation de portefeuille. Les résultats sur cinq ensembles de données accessibles au public montrent que nos procédures dominent complètement les fronts produits par les homologues de la littérature. En outre, nos variantes des algorithmes NSGA-II et SPEA 2 peuvent générer l'ensemble du front Pareto pour les problèmes à grande échelle pour lesquels les autres approches basées sur Pareto sont incapables de fonctionner correctement.

Le reste du document est organisé comme suit. Dans la section « Le problème de sélection des portefeuilles dans le cadre de mesures de risque à la baisse », nous introduisons trois relations de préférence fondées sur le principe du risque de récompense à la baisse et discutons des problèmes de sélection des portefeuilles connexes. La section « Algorithmes évolutifs basés sur Pareto » présente une description des MOEA utilisés pour résoudre les problèmes d'optimisation qui en résultent. La section « Analyse expérimentale » décrit les expériences numériques et la section « Remarques finales et recherche future » présente des remarques finales et des idées pour poursuivre la recherche.

## CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons décrit trois cas du problème de sélection de portefeuille conçu pour gérer correctement le risque à la baisse d'un placement. Un cadre flexible de récompense à risque multi-objectifs



a été présenté dans lequel les rendements attendus, la semi-variance et la cvar d'un portefeuille peuvent être optimisés simultanément. Ces problèmes ont été abordés à l'aide de deux algorithmes de tri non dominés, à savoir NSGA-II et SPEA 2, qui ont déjà montré des performances concurrentielles pour le problème de variance moyenne. En particulier, nous avons proposé une nouvelle combinaison d'opérateurs pour que les phases de sélection et de reproduction soient incluses dans les deux algorithmes. Une analyse comparative a été entreprise à l'égard d'une deuxième variante des mêmes algorithmes, impliquant une autre conception de configuration. Nous avons utilisé cinq ensembles de données accessibles au public, allant de problèmes d'optimisation de portefeuille de petite à grande taille. Les capacités des procédures ont été évaluées en fonction de quatre paramètres de rendement. Enfin, un ensemble de tests statistiques a vérifié la robustesse de ces résultats. Dans l'ensemble, les expériences numériques ont montré que les algorithmes proposés surpassaient les autres en ce qui concerne tous les critères. Même si les algorithmes avec la nouvelle configuration de variation exigeaient l'utilisation de plus de temps de calcul à mesure que la dimension des problèmes augmentait, ils ont néanmoins donné des résultats raisonnables pour les cas où les autres algorithmes n'ont pas réussi à capturer correctement la forme du front pareto.

Ces résultats de recherche peuvent être mis en pratique pour améliorer l'infrastructure de gestion des risques d'une société d'investissement. L'inclusion de plusieurs mesures de risque dans le processus d'optimisation du portefeuille peut accroître les capacités du système à décrire le risque, offrant ainsi des possibilités d'investissement plus attrayantes.

Les travaux de recherche futurs sur le sujet comprennent l'analyse de l'efficacité hors échantillon pour ce type de stratégie, qui devrait être améliorée par l'incorporation d'autres techniques de simulation pour estimer la semi-variance et la RSE. Nous sommes également intéressés à explorer des mécanismes qui exploitent de manière adaptative plusieurs schémas de sélection et opérateurs de reproduction pour accélérer la convergence et permettre d'arrêter automatiquement la recherche lorsqu'un niveau de qualité approprié pour l'ensemble approximatif a été atteint.

## **TRANSLATED VERSION: GERMAN**

Below is a rough translation of the insights presented above. This was done to give a general understanding of the ideas presented in the paper. Please excuse any grammatical mistakes and do not hold the original authors responsible for these mistakes.

## **ÜBERSETZTE VERSION: DEUTSCH**

Hier ist eine ungefähre Übersetzung der oben vorgestellten Ideen. Dies wurde getan, um ein allgemeines Verständnis der in dem Dokument vorgestellten Ideen zu vermitteln. Bitte entschuldigen Sie alle grammatikalischen Fehler und machen Sie die ursprünglichen Autoren nicht für diese Fehler verantwortlich.

## **EINLEITUNG**

Das Portfolioauswahlproblem kann als die optimale Allokation des Vermögens unter einer endlichen Anzahl von Vermögenswerten definiert werden, die einer sorgfältigen Verarbeitung aller verfügbaren Informationen über Investoren und Märkte folgt (Meucci 2009). Markowitz' Mittelwertmodell ist das bei weitem beliebteste Verfahren bei der Asset Allokation (Guerard 2009). Auch wenn es als Eckpfeiler in diesem Bereich gilt, weist das Modell der Mittelvarianzportfoliooptimierung aus theoretischer Sicht zwei gravierende Nachteile auf. Erstens, wenn Vermögensrenditen verzerrt und fettschwanzend sind, neigen sie dazu, nur einen begrenzten Anteil stochastisch dominanter Vermögenswerte in die effizienten Lösungen aufzunehmen und Vermögenswerte mit negativ verzerrten Renditen vorzeitig auszuschließen. Zweitens wird das Risiko durch Varianz gemessen, die sowohl die oben als auch unter den Zielrenditen gleich behandelt, während die Anleger sich mehr Sorgen über die Wahrscheinlichkeit machen, dass die

Anlagerenditen unter die Zielrendite fallen. Folglich werden Risiken unterschätzt und Portfolios, die abwärts effizient sind, ausgeschlossen.

Eine in der Literatur vorgeschlagene Lösung, um Markowitz' Ansatz effektiver zu gestalten, besteht darin, die Varianz durch eine Abwärtsrisikomaßnahme zu ersetzen, um die Verlustaversion der Anleger richtig zu modellieren. In diesem Zusammenhang wurde die Halbvarianz eingehend untersucht (Nawrocki 1999; Sing und Ong 2000). Zwei Hauptgründe rechtfertigen diese Bemühungen. Erstens ist die Halbvarianz eine Annäherung der Schiefe für die Renditeverteilung, da sie unter dem Zielwert wertigste Renditen misst. Je höher der Wert der Halbvarianz ist, desto größer sind sowohl der Grad der negativen Schiefe als auch das Risiko der Investition. Zweitens nähern sich die halbvarianzeffizienten Portfolios dem stochastisch-dominanten effizienten Satz an. Die Berechnung der Portfolio-Halbvarianz ist jedoch aufgrund der endogenen Natur der Portfolio-Ko-Semi-Varianz-Matrix, die von den Gewichten abhängt, die jedem Vermögenswert zugewiesen werden, eine schwierige Aufgabe, d. H. Änderungen der Gewichtungen beeinflussen die Perioden, in denen das Portfolio die Zielebene unterbietet, was wiederum die Bewertung der Ko-Halbvarianz-Matrix selbst beeinflusst. Es wurden einige Versuche vorgeschlagen, dieses Problem direkt zu lösen (Hogan und Warren 1972; Konno et al. 2002; Markowitz 1959; Markowitz et al. 1993). Andere Studien konzentrierten sich auf die Definition einer exogenen Co-Semi-Varianz-Matrix, die sich der endogenen Matrix zufriedenstellend nähert (Ballesterio und Pla-Santamaria 2005; Cumova und Nawrocki 2011; Estrada 2008; Nawrocki 1991). Aufgrund der regulatorischen Bedeutung der Quantifizierung großer Verluste im Bank- und Versicherungswesen nimmt eine weitere Klasse von Abwärtsrisikomaßnahmen, so genannte quantilbasierte Maßnahmen, heute eine führende Position im Risikomanagementsektor ein. Eines der beliebtesten Beispiele ist Value-at-Risk (var), definiert als der maximale Verlust, der über einen bestimmten Zeitraum auf einem bestimmten Konfidenzniveau auftritt. Obwohl var scheinbar einfach zu bedienen und intuitiv ist, bringt es mehrere Nachteile mit sich. In erster Linie ignoriert sie Verluste, die var übersteigen, und ist nicht subadditiv, d. H. Die Diversifizierung des Portfolios kann var erhöhen (Artzner et al. 1999). Aus rechnerischer Sicht ist var schwierig zu bedienen, wenn Investoren ihre Portfolios optimieren wollen, da es durch eine nichtlineare, nicht konvexe und nicht differenzierbare Funktion mit mehreren lokalen Optima (Gaivoronski und Pflug 2005) repräsentiert wird. Darüber hinaus können rationale Agenten, die ihre Entscheidungen gemäß der erwarteten Gebrauchstheorie treffen wollen, durch die Informationen im Zusammenhang mit dem Portfolio var irreführt werden (Yamai et al. 2002). Um diese Unzulänglichkeiten zu beheben, (Rockafellar et al. 2000) führte die bedingte Wertisiko -Risiko (cvar) ein, die als bedingte Erwartung von Verlusten über dem var definiert ist (Sarykalin et al. 2008). Cvar ist eine kohärente Risikomaßnahme im Sinne von (Artzner et al. 1999) und, da es sich um eine konvexe Funktion handelt, können Optimierungsprobleme mit cvar als Minimierungsziel und/oder Einschränkungen effizient gehandhabt werden (Krokhmal et al. 2002; Larsen et al. 2002; Rockafellar und Uryasev 2002).

Die zunehmende Komplexität praktischer Anwendungen hat Forscher dazu veranlasst, heuristische Verfahren zur Lösung ihrer Portfoliooptimierungsprobleme zu entwickeln. Diese Techniken erfordern weniger Domäneninformationen als die standardmäßigen gradientenbasierten mathematischen Programmiermethoden. Darüber hinaus garantieren sie eine zufriedenstellende Annäherung an Lösungen in einer fairen Rechenzeit, selbst wenn sie sich mit Nichtkonvexität, Diskontinuität und ganzzahligen Entscheidungsvariablen befassen. Die in der Soft-Computing-Literatur vorgeschlagenen Ansätze lassen sich in die folgenden beiden Gruppen einteilen. Einerseits optimieren einzelne objektive Methoden eine gewichtete Summe der Portfolioziele. Auf der anderen Seite versuchen multiobjektive Evolutionsalgorithmen (moeas), das Allokationsproblem direkt in seiner multiobjektiven Form anzugehen, indem gleichzeitig Risiko und Belohnung optimiert werden. Im ersten Fall wird der vollständige Satz von Risiko-Rendite-Profilen durch Variation eines Parameters ermittelt, der die Risikoaversion des Anlegers darstellt (Chang et al. 2000; Crama und Schyns 2003; Cura 2009; Woodside-Oriakhi et al. 2011). Im zweiten Fall wird die vollständige effiziente Grenze in einem einzigen Durchgang dargestellt (Anagnostopoulos und Mamanis 2011a; Meghwani und Thakur 2017; Mishra et al. 2014). Beide Kategorien achten sehr auf Codierungstypen und Einschränkungsbehandlungstechniken (Liagkouras und Metaxiotis 2015; Meghwani und Thakur 2017; Metaxiotis und Liagkouras 2012; Ponsich et al. 2013). Einige reale

Situationen, die in Markowitz' Modell nicht berücksichtigt werden, wurden kürzlich von (Eftekharian et al. 2017) und (Meghwani und Thakur 2018) analysiert. (Eftekharian et al. 2017) enthalten als Einschränkungen einige Einschränkungen für die Anzahl der Vermögenswerte im Portfolio, Beschränkungen bei der Investition in Vermögenswerte aus einer bestimmten Branche sowie Kardinalitäts-, Klassen- und Mengenbeschränkungen. Darüber hinaus entwickelten sie eine verbesserte Version des NSGA II-Algorithmus, genannt 2-Phasen-NSGA II, um das resultierende Optimierungsproblem zu lösen. Meghwani und Thakur (2018) konzentrieren sich auf das Problem des Umgangs mit Gleichstellungsbeschränkungen, wie Selbstfinanzierungsbeschränkungen und Einschränkungen, die sich aus der Einbeziehung von Transaktionskostenmodellen mit *moeas* ergeben. Die Forscher haben sich auch auf so genannte Schwarmintelligenzmethoden konzentriert, um die Rechenschwierigkeiten realistischer Portfoliodesigns zu überwinden. Im Gegensatz zu evolutionären Algorithmen, die das Prinzip der natürlichen Selektion nutzen, sind diese Ansätze vom Verhalten und der selbstorganisierenden Interaktion zwischen Agenten inspiriert, wie die Nahrungssuche von Ameise und Bienenvölkern, Vogelbeschafzucht und Fischschulbildung (siehe Ertenlice und Kalayci (2018) für eine detaillierte Überprüfung des Themas).

In den letzten Jahrzehnten wurden Algorithmen für maschinelles Lernen häufig verwendet, um Finanzdaten zu erforschen und datengesteuerte Vorhersagen zu treffen (Chao et al. 2019; Kou 2019). Zum Beispiel stellen (Huang und Kou 2014) einen Kernel-Entropie-Mannigfaltigkeits-Lernalgorithmus vor, um die Beziehungen zwischen zwei Finanzdatenpunkten zu messen, um die Eigenschaften eines Finanzsystems zu beschreiben, indem die dynamischen Eigenschaften des ursprünglichen Datenraums abgeleitet werden. In ähnlicher Weise (Huang et al. 2017) schlagen einen informationsmetrischen mannigfaltigen Lernalgorithmus vor, um die intrinsische Mannigfaltigkeit eines dynamischen Finanzsystems zu extrahieren und drohende Krisen zu erkennen. (Ergu et al. 2014) konzentriert sich auf den Einsatz des analytischen Netzwerkprozesses bei der Risikobewertung und Entscheidungsanalyse eines auftretenden Ereignisses. Sie schlagen einen neuen Konsistenzindex vor, um die Wichtigsten Faktoren von Risiken zu bewerten und die Auswirkungen und Präferenzen von Entscheidungsalternativen zu analysieren. Zhang et al. (2019) entwickeln drei weiche Mindestkostenmodelle, die auf unterschiedlichen gewichteten Durchschnittsoperatoren basieren, um Konsensentscheidungen zu lösen. Die Nützlichkeit der vorgeschlagenen Modelle wird in einem realen Kreditkonsensproblem anhand von Daten einer chinesischen P2P-Plattform validiert.

Kalayci et al. (2019) überprüfen modernste Methoden, die sich der Optimierung des mittleren Varianzportfolios widmen.

Evolutionäre Berechnungen werden durch Iterationen durchgeführt, und in jeder Iteration werden die Gewichtungen der Portfolios von vornherein bekannt, da sie vom Algorithmus generiert werden. So ist es möglich, direkt zu bestimmen, in welchen Perioden das Portfolio das Zielniveau unterbietet. Auf diese Weise kann die Schwierigkeit, die Ex-post-Portfolio-Halbvarianz zu berechnen, durch den Einsatz eines evolutionären Algorithmus fruchtbar gelöst werden. Eine der ersten Studien, die dies versucht, ist (Dueck und Winker 1992), die das biobjektive Optimierungsproblem in ein einzelnes Ziel umformulieren und es durch eine lokale Suchtechnik, die sogenannte Schwellenakzeptanz, lösen. In ähnlicher Weise (Arnone et al. 1993) schlagen eine Lösung für ein parametrisches Programmierproblem vor, mit dem Ziel, eine konvexe Kombination von Mittelwert und Halbvarianz zu optimieren. Der Algorithmus basiert auf Whitleys GENITOR-System (Whitley 1988) und verwendet eine stationäre Zuchtstrategie und elitäre Auswahl. Chang et al. (2009) wenden einen genetischen Algorithmus auf Portfoliooptimierungsprobleme in verschiedenen Risikomaßen an, nämlich Varianz, Halbvarianz, absolute Abweichung und Varianz mit Schiefe. Kürzlich (Liagkouras und Metaxiotis 2013) befasste sich das Problem der mittel-halbvarianzen Portfoliooptimierung aus einer multiobjektiven Perspektive, indem ein Ad-hoc-Evolutionsalgorithmus entwickelt wurde. Der Nachweis der Robustheit des Algorithmus wird in Out-of-Sample-Tests sowohl während der Bullen- als auch der Bärenmarktbedingungen auf dem FTSE 100 erreicht. Macedo et al. (2017) vergleichen den nicht dominierten Sortiergenetischen Algorithmus II (NSGA-II, Deb et al. (2002)) und den Kraft-Pareto-Evolutionsalgorithmus 2 (SPEA 2, Zitzler et al. (2001)) innerhalb des Rahmens zur Optimierung des Mittelwert-Halbvarianz-Portfolios. Numerische Experimente zeigen, dass NSGA-II DIE SPEA 2 in der Probe übertrifft. Senhaji et al. (2016) schlagen vor, das Problem durch die Kombination des

kontinuierlichen Hopfield-Neuralnetzes mit NSGA-II zu lösen. Die Wirksamkeit dieser Strategie wird anhand eines Portfolios von 20 Vermögenswerten nachgewiesen.

In Bezug auf die quantilbasierten Minimierungsprobleme mit vielen Finanzinstrumenten ist eine Vielzahl von Preisszenarien notwendig, um das Risiko richtig abzuschätzen. Da die Dimension der Probleme zunimmt, kann diese Operation zeitaufwändig sein (Lim et al. 2010) und die Verwendung von Heuristiken kann ratsam oder sogar notwendig sein, um eine Lösung zu erkennen. Ein Beispiel dafür ist die in Gilli M und Hysi (2006) vorgeschlagene mehrzweck-datengesteuerte Optimierungsheuristik, die sich mit verschiedenen Risikofunktionen wie var, cvar, maximalem Verlust und Omega sowie praktischen Einschränkungen der Portfoliozusammensetzung befasst. Ein evolutionärer Berechnungsansatz wird von (Hochreiter 2007) entwickelt, um das allgemeine szenariobasierte Problem der Risiko-Rendite-Portfoliooptimierung zu lösen, wenn Standardabweichung, var oder cvar verwendet werden, um das Risiko der Investition darzustellen. Eine Variante des NSGA-II-Algorithmus auf Basis von Differentialoperatoren wird von (Krink und Paterlini 2011) zur Portfoliooptimierung unter Einbeziehung realer Zwänge und quantilbasierter Risikokennzahlen entwickelt. In der Zwischenzeit wird ein Vergleich der Anpassungsmöglichkeiten verschiedener moeas in einer Erweiterung neuer Einschränkungen und/oder des Ersatzes der Risikofunktion gegeben (Anagnostopoulos und Mamanis 2011b) und (Baixauli-Soler et al. 2012) sich auf die Performance von SPEA 2 konzentriert. Kürzlich wurden in Chen und Wang (2015) und (Qin et al. 2014) hybride Aktienhandelssysteme vorgeschlagen, die auf evolutionären Metaheuristiken und mittleren cvar-Modellen basieren.

Der Beitrag dieser Studie ist zweifach. Einerseits beziehen wir auf Basis der vielversprechenden Ergebnisse von (Subbu et al. 2005) und (Baixauli-Soler et al. 2010) die verlustscheue Haltung der Anleger sowie die von der Regulierungsbehörde auferlegten Kapitalanforderungen in den gleichen Portfoliooptimierungsrahmen ein und untersuchen den Zusammenhang zwischen Halbvarianz und cvar bei der Quantifizierung des Abwärtsrisikos. Auf der anderen Seite erweitern wir die Forschung von (Liu et al. 2010) und untersuchen die Wirksamkeit der Verwendung des einheitlichen Auswahlschemas, des erweiterten Intercross-Operators (Gen und Cheng 2000; Mühlenbein und Schlierkamp-Voosen 1993) und die Gaußsche Mutation (Hinterding 1995; Schwefel 1987) in den Algorithmen NSGA-II und SPEA 2, um die angenäherten Pareto-Fronten für die betrachteten Abwärtsrisiko-Portfoliooptimierungsprobleme zu generieren. Darüber hinaus wird die Leistung der vorgeschlagenen Algorithmen mit der anderer Varianten der NSGA-II- und SPEA 2-Algorithmen verglichen, die sich bereits bei Problemen bei der Portfoliooptimierung als sehr wettbewerbsfähig erwiesen haben. Die Ergebnisse von fünf öffentlich zugänglichen Datensätzen zeigen, dass unsere Verfahren die Fronten der Gegenstücke aus der Literatur vollständig dominieren. Darüber hinaus können unsere Varianten der Algorithmen NSGA-II und SPEA 2 die gesamte Pareto-Front für großangelegte Probleme generieren, bei denen die anderen Pareto-basierten Ansätze nicht richtig funktionieren können.

Der Rest des Papiers ist wie folgt organisiert. Im Abschnitt "Portfolioauswahlproblem unter Abwärtsrisikomaßnahmen" führen wir drei Präferenzbeziehungen auf Basis des Reward-Downside-Risikoprinzips ein und diskutieren die damit verbundenen Portfolioauswahlprobleme. Der Abschnitt "Pareto-basierte evolutionäre Algorithmen" enthält eine Beschreibung der moeas, die zur Lösung der daraus resultierenden Optimierungsprobleme verwendet werden. Der Abschnitt "Experimentelle Analyse" umreißt die numerischen Experimente und den Abschnitt "Schlussbemerkungen und zukünftige Forschung" enthält abschließende Bemerkungen und Ideen für die weitere Forschung.

## **SCHLUSSFOLGERUNG**

In dieser Studie haben wir drei Fälle des Portfolioauswahlproblems beschrieben, das darauf ausgelegt ist, das Abwärtsrisiko einer Investition richtig zu behandeln. Es wurde ein flexibles multiobjektives Reward-to-Risk-Framework vorgestellt, in dem erwartete Renditen, Halbabweichungen und cvar eines Portfolios gleichzeitig optimiert werden können. Diese Probleme wurden mit zwei nicht dominierten Sortieralgorithmen angegangen, nämlich NSGA-II und SPEA 2, die bereits eine wettbewerbsfähige Leistung für das Problem der mittleren Varianz gezeigt haben. Insbesondere haben wir eine neuartige

Kombination von Operatoren für die Auswahl- und Reproduktionsphasen vorgeschlagen, die in beide Algorithmen einbezogen werden sollen. Eine vergleichende Analyse wurde in Bezug auf eine zweite Variante der gleichen Algorithmen durchgeführt, die einen anderen Konfigurationsentwurf beinhaltet. Wir haben fünf öffentlich verfügbare Datensätze verwendet, die von kleinen bis zu großen Portfoliooptimierungsproblemen reichen. Die Fähigkeiten der Verfahren wurden anhand von vier Leistungsmetriken bewertet. Schließlich überprüfte eine Reihe statistischer Tests die Robustheit dieser Ergebnisse. Insgesamt zeigten die numerischen Experimente, dass die vorgeschlagenen Algorithmen die anderen in Bezug auf alle Kriterien übertrafen. Auch wenn die Algorithmen mit der neuartigen Variationskonfiguration die Verwendung von mehr Rechenzeit erforderten, als die Dimension der Probleme zunahm, lieferten sie dennoch vernünftige Ergebnisse für die Fälle, in denen die anderen Algorithmen die Form der Pareto-Front nicht richtig erfassten.

Diese Forschungsergebnisse können in die Praxis umgesetzt werden, um die Risikomanagementinfrastruktur einer Investmentgesellschaft zu verbessern. Die Einbeziehung mehrerer Risikomaßnahmen in den Portfoliooptimierungsprozess kann die Möglichkeiten des Systems erhöhen, das Risiko zu beschreiben, und bietet attraktivere Anlagemöglichkeiten.

Zukünftige Forschungsarbeiten zu diesem Thema umfassen die Analyse der Out-of-Sample-Wirksamkeit für diese Art von Strategie, die durch die Einbeziehung anderer Simulationstechniken zur Schätzung von Halbvarianz und cvar verbessert werden soll. Wir sind auch daran interessiert, Mechanismen zu erforschen, die mehrere Auswahl schemata und Reproduktionsoperatoren adaptiv ausnutzen, um die Konvergenz zu beschleunigen und die Suche automatisch zu stoppen, wenn ein angemessenes Qualitätsniveau für den angenäherten Satz erreicht wurde.

## **TRANSLATED VERSION: PORTUGUESE**

Below is a rough translation of the insights presented above. This was done to give a general understanding of the ideas presented in the paper. Please excuse any grammatical mistakes and do not hold the original authors responsible for these mistakes.

## **VERSÃO TRADUZIDA: PORTUGUÊS**

Aqui está uma tradução aproximada das ideias acima apresentadas. Isto foi feito para dar uma compreensão geral das ideias apresentadas no documento. Por favor, desculpe todos os erros gramaticais e não responsabilize os autores originais responsáveis por estes erros.

## **INTRODUÇÃO**

O problema de seleção da carteira pode ser definido como a alocação ideal de riqueza entre um número finito de ativos que segue o processamento cuidadoso de todas as informações disponíveis sobre investidores e mercados (Meucci 2009). O modelo de variância média de Markowitz é de longe o procedimento mais popular na alocação de ativos (Guerard 2009). Mesmo que seja considerado a pedra angular nesse campo, o modelo de otimização da carteira de variância média apresenta duas sérias desvantagens do ponto de vista teórico. Em primeiro lugar, quando os retornos dos ativos são distorcidos e com cauda gorda, eles tendem a incluir apenas uma proporção limitada de ativos estocasticamente dominantes nas soluções eficientes, e prematuramente impedir ativos com retornos negativamente distorcidos. Em segundo lugar, o risco é medido pela variância, que trata os retornos acima e abaixo da meta igualmente, enquanto os investidores estão mais preocupados com a probabilidade de retorno de investimento cair abaixo do retorno-alvo. Consequentemente, os riscos são subestimados e as carteiras que são eficientes em desvantagem são descartadas.

Uma solução proposta na literatura para tornar a abordagem de Markowitz mais eficaz é substituir a variância por uma medida de risco negativo, a fim de modelar a aversão à perda dos investidores adequadamente. Nesse contexto, a semivariância tem sido extensivamente estudada (Nawrocki 1999; Cantá-lo e Ong 2000). Duas razões principais justificam esses esforços. Em primeiro lugar, a semivariância é uma aproximação da distorção para a distribuição de retorno, uma vez que mede retornos abaixo da meta. Quanto maior o valor da semivariância, maior é tanto o grau de inclinação negativa quanto o risco do investimento. Em segundo lugar, as carteiras eficientes de semivariância aproximam de perto o conjunto eficiente de dominância estocástica. No entanto, o cálculo da semivariância da carteira é uma tarefa difícil devido à natureza dodógena da matriz de covariância da carteira, que depende dos pesos atribuídos a cada ativo, ou seja, as mudanças nos pesos afetam os períodos em que a carteira apresenta baixo desempenho do nível-alvo, o que, por sua vez, afeta a avaliação da própria matriz de covariância. Algumas tentativas foram propostas para resolver este problema diretamente (Hogan e Warren 1972; Konno et al. 2002; Markowitz 1959; Markowitz et al. 1993). Outros estudos se concentraram na definição de uma matriz exógena de covariância que se aproxima satisfatoriamente da endógena (Ballesteros e Pla-Santamaria 2005; Cumova e Nawrocki 2011; Estrada 2008; Nawrocki 1991). Hoje, devido à importância regulatória de quantificar grandes perdas em bancos e seguros, outra classe de medidas de risco de desvantagem, chamadas de medidas baseadas em quantile, ocupa uma posição de liderança no setor de gestão de riscos. Um dos exemplos mais populares é o valor em risco (var), definido como a perda máxima que ocorre ao longo de um determinado período em um determinado nível de confiança. Embora o var seja aparentemente fácil de usar e intuitivo, ele apresenta várias desvantagens. Em primeiro lugar, ignora perdas superiores ao var e não é sub-aditivo, ou seja, a diversificação da carteira pode aumentar o var (Artzner et al. 1999). Do ponto de vista computacional, o var é difícil de usar quando os investidores querem otimizar suas carteiras, uma vez que é representado por uma função não linear, não convexa e não diferenciável com várias ótimas locais (Gaivoronski e Pflug 2005). Além disso, agentes racionais que desejam agir em suas decisões de acordo com a teoria da utilidade esperada podem ser enganados pelas informações relacionadas à carteira var (Yamai et al. 2002). Para lidar com essas deficiências, (Rockafellar et al. 2000) introduziu o valor condicional em risco (cvar), que é definido como a expectativa condicional de perdas acima do var (Sarykalin et al. 2008). O cvar é uma medida de risco coerente no sentido de (Artzner et al. 1999) e, por ser uma função convexa, problemas de otimização com cvar como o objetivo de minimização e/ou restrições podem ser manuseados eficientemente (Krokhmal et al. 2002; Larsen et al. 2002; Rockafellar e Uryasev 2002).

O aumento da complexidade das aplicações práticas levou os pesquisadores a desenvolver procedimentos heurísticos para resolver seus problemas de otimização de portfólio. Essas técnicas requerem menos informações de domínio para serem consideradas do que os métodos de programação matemática baseados em gradientes padrão. Além disso, garantem aproximações satisfatórias a soluções em um tempo computacional justo, mesmo quando lidam com variáveis de decisão não convexas, descontinuidade e inteiro. As abordagens propostas na literatura de computação suave podem ser categorizadas nos dois grupos seguintes. Por um lado, métodos objetivos únicos otimizam uma soma ponderada dos objetivos da carteira. Por outro lado, algoritmos evolutivos multi-objetivos (moeas) tentam resolver o problema de alocação diretamente em sua forma multi-objetiva, otimizando simultaneamente risco e recompensa. No primeiro caso, o conjunto completo de perfis de risco-retorno é obtido por meio de um parâmetro variado que represente a aversão ao risco do investidor (Chang et al. 2000; Crama e Schyns 2003; Cura 2009; Woodside-Oriakhi et al. 2011). No segundo caso, a fronteira completa e eficiente é representada em turno único (Anagnostopoulos e Mamanis 2011a; Meghwani e Thakur 2017; Mishra et al. 2014). Ambas as categorias prestam muita atenção aos tipos de codificação e técnicas de manuseio de restrições (Liagkouras e Metaxiotis 2015; Meghwani e Thakur 2017; Metaxiotis e Liagkouras 2012; Ponsich et al. 2013). Algumas situações da vida real, que não são consideradas no modelo de Markowitz, foram analisadas recentemente por (Eftekharian et al. 2017) e (Meghwani e Thakur 2018). (Eftekharian et al. 2017) incluem como restrições algumas restrições ao número de ativos na carteira, limitações ao investimento em ativos de uma determinada indústria e restrições de cardealidade, classe e quantidade. Além disso, eles desenvolveram uma versão melhorada do algoritmo NSGA II, chamado NSGA II de 2 Fases, para resolver o problema de

otimização resultante. Meghwani e Thakur (2018) se concentram no problema de lidar com restrições de igualdade, como restrições de autofinanciamento, e restrições decorrentes da inclusão de modelos de custos de transação usando moedas. Os pesquisadores também se concentraram nos chamados métodos de inteligência de enxame para superar as dificuldades computacionais dos projetos realistas do portfólio. Ao contrário dos algoritmos evolutivos que utilizam o princípio da seleção natural, essas abordagens são inspiradas no comportamento e na interação auto-organizada entre os agentes, como forrageamento de colônias de formigas e abelhas, rebanho de aves e escolaridade de peixes (ver Ertenlice e Kalayci (2018) para uma revisão detalhada do assunto).

Nas últimas décadas, algoritmos de aprendizagem de máquina têm sido amplamente utilizados para explorar dados financeiros e fazer previsões baseadas em dados (Chao et al. 2019; Kou 2019). Por exemplo, (Huang e Kou 2014) apresentam um algoritmo de aprendizagem de entropia de kernel para medir as relações entre dois pontos de dados financeiros, a fim de descrever as características de um sistema financeiro, derivando as propriedades dinâmicas do espaço original de dados. Da mesma forma, (Huang et al. 2017) propõem um algoritmo de aprendizagem baseado em métrica de informação para extrair o coletor intrínseco de um sistema financeiro dinâmico e detectar crises iminentes. (Ergu et al. 2014) foca no uso do processo de rede analítica na avaliação de risco e análise de decisão de um evento emergente. Eles propõem um novo índice de consistência para avaliar os principais fatores de risco e analisar os impactos e preferências das alternativas de decisão. Zhang et al. (2019) desenvolvem três modelos de custo mínimo macios baseados em diferentes operadores médios ponderados para resolver problemas de tomada de decisão de consenso. A utilidade dos modelos propostos é validada em um problema de consenso de empréstimos do mundo real, usando dados de uma plataforma P2P chinesa.

Kalayci et al. (2019) revisam métodos de última geração dedicados à otimização do portfólio de variação média.

Os cálculos evolutivos são feitos por iterações e, em cada iteração, os pesos das carteiras são conhecidos a priori porque são gerados pelo algoritmo. Assim, é possível determinar diretamente em quais períodos a carteira tem um desempenho inferior ao nível de meta. Dessa forma, a dificuldade de calcular a semi-variância do ex-pós-carteira pode ser frutíferamente resolvida pelo uso de um algoritmo evolutivo. Um dos primeiros estudos a tentar isso é (Dueck e Winker 1992), que reformulam o problema de otimização bi-objetiva em um único objetivo e o resolvem através de uma técnica de busca local, chamada de aceitação de limiares. Da mesma forma, (Arnone et al. 1993) propõem uma solução para um problema de programação paramétrica com o objetivo de otimizar uma combinação convexa de média e semivariância. O algoritmo é baseado no sistema GENITOR de Whitley (Whitley 1988) e usa uma estratégia de reprodução de estado estável e seleção elitista. Chang et al. (2009) aplicam um algoritmo genético para problemas de otimização de portfólio em diferentes medidas de risco, ou seja, variância, semivariância, desvio absoluto e variância com distorção. Recentemente, (Liagkouras e Metaxiotis 2013) abordam o problema de otimização do portfólio sem-variância a partir de uma perspectiva multi-objetiva, desenvolvendo um algoritmo evolutivo ad-hoc. A evidência da robustez do algoritmo é realizada em testes fora da amostra durante as condições do mercado de touros e ursos no FTSE 100. Macedo et al. (2017) comparam o algoritmo genético de classificação não dominado II (NSGA-II, Deb et al. (2002)) e a força Pareto Evolutionary Algorithm 2 (SPEA 2, Zitzler et al. (2001)) dentro do quadro de otimização do portfólio sem-variância. Experimentos numéricos indicam que o NSGA-II supera a amostra SPEA 2. Senhaji et al. (2016) propõem resolver o problema combinando a rede neural Hopfield contínua com o NSGA-II. A eficácia dessa estratégia é comprovada utilizando uma carteira de 20 ativos.

Em relação aos problemas de minimização baseados em quantile envolvendo muitos instrumentos financeiros, um grande número de cenários de preços é necessário para estimar o risco corretamente. À medida que a dimensão dos problemas aumenta, essa operação pode ser demorada (Lim et al. 2010) e o uso de heurística pode ser aconselhável ou até mesmo necessário para detectar uma solução. Um exemplo é fornecido pela otimização heurística multiuso baseada em dados proposta em Gilli M e Hysi (2006), que lida com diferentes funções de risco, como var, cvar, perda máxima e Ômega, bem como com restrições práticas na composição do portfólio. Uma abordagem de computação evolutiva é desenvolvida pela (Hochreiter 2007) para resolver o problema geral de otimização do portfólio de risco-retorno de risco

baseado em cenário quando o desvio padrão, var ou cvar são usados para representar o risco do investimento. Uma variante do algoritmo NSGA-II baseado em operadores diferenciais é desenvolvida pela (Krink e Paterlini 2011) para otimização de portfólio envolvendo restrições do mundo real e medidas de risco baseadas em quantile. Enquanto isso, uma comparação das capacidades de diferentes moedas para adaptar-se em qualquer adição de novas restrições e/ou substituição da função de risco é dada em (Anagnostopoulos e Mamanis 2011b), e (Baixauli-Soler et al. 2012) foco no desempenho da SPEA 2. Recentemente, sistemas híbridos de negociação de ações baseados em metaheurística evolutiva e modelos médios de cvar são propostos em Chen e Wang (2015) e (Qin et al. 2014).

A contribuição deste estudo é dupla. Por um lado, com base nos resultados promissores (Subbu et al. 2005) e (Baixauli-Soler et al. 2010), incluímos no mesmo quadro de otimização da carteira a atitude avessa à perda dos investidores, bem como os requisitos de capital impostos pelo regulador, e investigamos a relação entre semi-variância e cvar na quantificação do risco negativo. Por outro lado, estendemos a pesquisa de (Liu et al. 2010) e investigamos a eficácia do uso do esquema de seleção uniforme, o operador de crossover intermediário estendido (Gen e Cheng 2000; Mühlenbein e Schlierkamp-Voosen 1993), e a mutação gaussiana (Hinterding 1995; Schwefel 1987) nos algoritmos NSGA-II e SPEA 2, a fim de gerar as frentes Pareto aproximadas para os considerados problemas de otimização de portfólio baseados em risco negativo. Além disso, o desempenho dos algoritmos propostos é comparado ao de outras variantes dos algoritmos NSGA-II e SPEA 2 que já se mostraram altamente competitivos em problemas de otimização de portfólio. Os resultados de cinco conjuntos de dados disponíveis publicamente mostram que nossos procedimentos dominam completamente as frentes produzidas pelas contrapartes da literatura. Além disso, nossas variantes dos algoritmos NSGA-II e SPEA 2 podem gerar toda a frente Pareto para problemas em larga escala para os quais as outras abordagens baseadas em Pareto são incapazes de funcionar corretamente.

O resto do jornal é organizado da seguinte forma. Na seção "O problema de seleção da carteira sob medidas de risco negativo", introduzimos três relações de preferência com base no princípio de risco de desvantagem da recompensa e discutimos os problemas relacionados à seleção da carteira. A seção "Algoritmos Evolutivos baseados em Pareto" apresenta uma descrição dos moedas usados para resolver os problemas de otimização resultantes. A seção "Análise experimental" descreve os experimentos numéricos e a seção "Concluindo observações e pesquisas futuras" apresenta observações e ideias finais para novas pesquisas.

## **CONCLUSÃO**

Neste estudo, descrevemos três instâncias do problema de seleção da carteira projetadas para lidar adequadamente com o risco negativo de um investimento. Foi apresentado um quadro multi-objetivo flexível de recompensa para risco, no qual os retornos esperados, a semivariância e o cvar de uma carteira podem ser otimizados simultaneamente. Esses problemas foram enfrentados usando dois algoritmos de classificação não dominados, ou seja, NSGA-II e SPEA 2, que já mostraram desempenho competitivo para o problema de variância média. Em particular, propusemos uma nova combinação de operadores para as fases de seleção e reprodução a serem incluídas em ambos os algoritmos. Uma análise comparativa foi realizada em relação a uma segunda variante dos mesmos algoritmos, envolvendo outro design de configuração. Usamos cinco conjuntos de dados disponíveis publicamente, que vão desde problemas de otimização de portfólio de pequeno a grande porte. As capacidades dos procedimentos foram avaliadas em termos de quatro métricas de desempenho. Finalmente, um conjunto de testes estatísticos verificou a robustez desses achados. No geral, os experimentos numéricos mostraram que os algoritmos propostos superaram os outros em relação a todos os critérios. Mesmo que os algoritmos com a nova configuração de variação exigissem o uso de mais tempo computacional à medida que a dimensão dos problemas aumentava, eles, no entanto, produziram resultados razoáveis para os casos em que os outros algoritmos não conseguiram capturar a forma da frente Pareto corretamente.

Esses achados da pesquisa podem ser colocados em prática para melhorar a infraestrutura de gestão de riscos de uma empresa de investimento. A inclusão de diversas medidas de risco no processo de otimização



do portfólio pode aumentar a capacidade do sistema para descrever o risco, proporcionando oportunidades de investimento mais atraentes.

Pesquisas futuras sobre o tema incluem a análise da eficácia fora da amostra para esse tipo de estratégia, que deverá ser aprimorada pela incorporação de outras técnicas de simulação para estimar a semivariância e a RC. Também estamos interessados em explorar mecanismos que explorem adaptativamente vários esquemas de seleção e operadores de reprodução para acelerar a convergência e permitir que a busca seja interrompida automaticamente quando um nível adequado de qualidade para o conjunto aproximado foi atingido.